

## 11. évfolyam gimnázium

1. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog kezet). Az üdvözlések során egy adott pillanatban kiderül, hogy még mindenkinek négy kézfogása van hátra és eddig 168 kézfogás történt. Hány résztvevője van a bankettnek?
2. Egy trapéz alapjai 12 cm és 8 cm hosszúak. Az egyik átló  $30^\circ$ -os szöget zár be az alappal és merőleges a másik átlóra.
  - a) Hány cm hosszú a trapéz két átlója?
  - b) Mekkora a trapéz területe?
3. Adva van egy 2022 oldalú konvex sokszög és belsejében 11 pont úgy, hogy a sokszög csúcsai és a 11 pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. Felhasználva a sokszög csúcsait és a 11 pontot, bontsuk fel a sokszöget olyan háromszögekre, amelyeknek csúcsai az előbbi 2033 pont közül valók. Hány háromszöget kapunk?
4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
  - a)  $x^2y - 4x^3 = 2023$  az egész számok halmazán.
  - b)  $x^2 - y^2 - 2x = 10$  a természetes számok halmazán.
5. Egy csupa fiúból álló osztályban 18-an sakkoznak, 23-an fociznak, 21-en bicikliznek és 17-en túráznak. Tudjuk, hogy 9 olyan fiú van, aki sakkozik és focizik, 7, aki sakkozik és biciklizik, 6, aki sakkozik és túrázik, 12, aki biciklizik és focizik, 9-en fociznak és túráznak és 12-en vannak, akik bicikliznek és túráznak is. A sakkot a biciklizést és a focit 4-en, a sakkot a focit és a túrázást 3-an, a sakkot a biciklizést és a túrázást 5-en, a focit a biciklizést és a túrázást 7-en tekintik kedvenc szabadidős elfoglaltságuknak. Van három olyan fiú, aki mindegyik sportnak hódol. Tudjuk végül, hogy a négy közül legalább az egyiket mindegyik fiú űzi. Hány fiú van az osztályban?
6. Tekintsük az  $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4m - 21 = 0$  másodfokú egyenletet, ahol  $m$  valós paraméter.
  - a) Bizonyítsuk be, hogy az egyenlet valós gyökeinek különbsége nem függ  $m$ -től!
  - b) Határozzuk meg  $m$  azon értékét, melyre az egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális!

**Minden feladat megoldása 10 pontot ér.**