(10. osztály)

*Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!*

**1. Két természetes szám összege 2022, legnagyobb közös osztójuk 337. Melyik ez a két szám?**

**(14 pont)**

*Megoldás:*

Jelölje a két számot $x$ és $y$. Mivel 337 a legnagyobb közös osztójuk, ezért felírhatók $x = 337a$ és $y = 337b$ alakban, ahol $(a; b) = 1$, azaz relatív prímek.

(5 pont)

Az összegük:

$$337a + 337b = 2022$$

(2 pont)

Ebből:

$$a + b = 6$$

adódik.

(2 pont)

Tehát a lehetséges számpárok, melyek relatív prímek: $(a; b) = (1; 5)$ vagy $(a; b) = (5; 1)$.

(3 pont)

Így a keresett két természetes szám 337 és 1685 lesz.

(2 pont)

**Összesen: 14 pont**

**2. Egy iskola tanulóinak 30%-a fiú. A fiúk 55%-a szemüveges. A. szemüveget nem viselők 73%-a lány. A szemüvegesek, vagy a szemüveget nem viselők vannak többen az iskola tanulói között?**

(14 pont)

*Megoldás:*

Az osztály $30 \cdot 0{,}55 = 16{,}5\%$-a szemüveges fiú.

(4 pont)

A nem szemüveges fiúk teszik ki az osztály $30\% - 16{,}5\% = 13{,}5\%$-át.

A feltételek alapján ez alkotja a nem szemüvegesek $100\% - 73\% = 27\%$-át.

(5 pont)

Így a nem szemüvegesek összesen az osztály $\frac{27\%}{0{,}135} = 50\%$-át alkotják. Vagyis az iskola tanulói között ugyanannyi szemüveges és nem szemüveges található.

(5 pont)

**Összesen: 14 pont**

**3. Hány $x$ egész szám esetén teljesül az $\frac{|x-1|-1}{|x-1|} \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség?**

(16 pont)

<u>Megoldás:</u>

Az egyenlőtlenségnek nincs értelme $x = 1$ esetén. Így ez nem lehet megoldás.

(3 pont)

Mivel $|x-1|$ pozitív, ezért szorozhatunk vele:

(2 pont)

$$2|x-1| - 2 \leq |x-1|$$
$$|x-1| \leq 2$$

(3 pont)

Így:

$$-2 \leq x - 1 \leq 2$$

amiből

$$-1 \leq x \leq 3$$

(4 pont)

Mivel az 1 nem lehet megoldás, ezért ebben az intervallumban a -1, 0, 2, és 3, azaz négy egész szám tesz eleget az egyenlőtlenségnek.

(4 pont)

**Összesen: 16 pont**

**4. Legyenek $x$ és $y$ különböző valós számok, melyek átlaga $z$. Határozzuk meg $x$ és $y$ értékét úgy, hogy az $x^2$ és $y^2$ átlaga $z^2$ legyen!**

**(18 pont)**

<u>Megoldás:</u>

A feltételek alapján:

$$\frac{x+y}{2} = z$$

$$\frac{x^2+y^2}{2} = z^2$$

(4 pont)

A $z$-t a második egyenletbe helyettesítve, majd átrendezve:

$$\frac{x^2+y^2}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$
$$2x^2 + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = 0$$

(10 pont)

Ez csak $x = y$ esetén teljesül, vagyis nincs a feltételeknek megfelelő valós számpár.

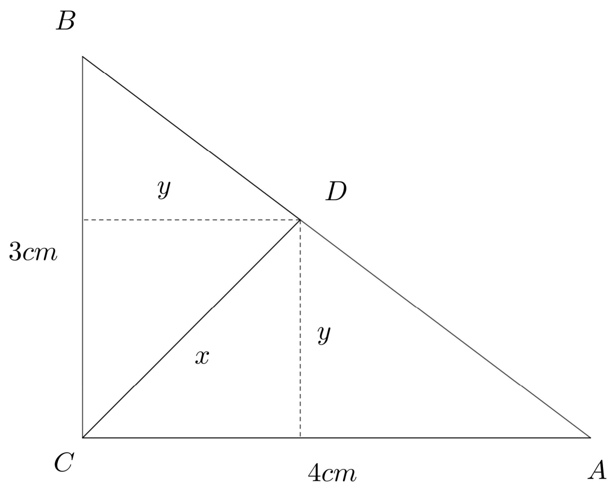
(4 pont)

**Összesen: 18 pont**

**5. Egy derékszögű háromszög két befogójának hossza 3 cm és 4 cm. Mekkora a derékszög szögfelezőjének a háromszögbe eső szakasza?**

**(18 pont)**

<u>*Megoldás:*</u>
Készítsünk ábrát és használjuk a jelöléseit.




(3 pont)

A szögfelező minden pontja ugyanakkora távolságra van a befogóktól, ezért a D metszéspont is.

(4 pont)

Az *ABC* derékszögű háromszög területe:

$$t = \frac{3\ cm \cdot 4\ cm}{2} = 6\ cm^2$$

(4 pont)

Ez az *ADC* és *BDC* háromszögek területének az összege is:

$$\frac{4y}{2} + \frac{3y}{2} = 6$$

Így $y = \frac{12}{7}\ cm.$

(4 pont)

A szögfelező szakaszának hossza egy *y* oldalú négyzet átlója lesz, azaz

$$x = \frac{\sqrt{2} \cdot 12}{7} \approx 2{,}42\ cm$$

(3 pont)

**Összesen: 18 pont**

**6. A táblára felírtuk a pozitív egész számokat 1-től 26-ig, majd ezek közül letöröltünk kettőt. Észrevettük, hogy a táblán maradt számok összege éppen a letörölt két szám szorzatával egyezik meg. Melyik két számot törölhettük le?**

**(20 pont)**

<u>*Megoldás:*</u>
Legyen a két letörölt szám $x$ és $y$, ahol $x < y$.
A számok összege 1-től 26-ig:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 26 = \frac{(26+1)\cdot 26}{2} = 351$$

(4 pont)

A feltételek szerint:

$$351 - x - y = xy \qquad (*)$$

(2 pont)

melyet átrendezve és szorzattá alakítva:

$$351 = xy + x + y$$
$$352 = xy + x + y + 1$$
$$352 = (x+1)(y+1)$$

(4 pont)

A $351 = 2^5 \cdot 11$ lehetséges osztópárjait kell keresnünk. Mivel $1 \le x < y \le 26$, ezért teljesül, hogy $2 \le x + 1 < y + 1 \le 27$.

(4 pont)

Az $x$-re nézve lehetséges osztópárok: $2 \cdot 176 = 4 \cdot 88 = 8 \cdot 44 = 11 \cdot 32 = 16 \cdot 22 = 352$ osztópárok közül $x$-re és $y$-ra is csak a $16 \cdot 22$ felel meg.

(4 pont)

Vagyis a két letörölt szám a 15 és 21 lesznek, melyet az ellenőrzés igazol.

(2 pont)

**Összesen: 20 pont**

*/ Ha a (*) egyenletnek próbálgatással találja meg az egyetlen megfelelő megoldását, akkor azért 4 pontot, tehát összesen 10 pontot kapjon. Ebből rossz megoldásonként 2-2 pontot vonjunk le. /*