(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Két természetes szám összege 2022, legnagyobb közös osztójuk 337. Melyik ez a két szám?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot x és y. Mivel 337 a legnagyobb közös osztójuk, ezért felírhatók $x = 337a$ és $y = 337b$ alakban, ahol $(a; b) = 1$, azaz relatív prímek.

(5 pont)

Az összegük:

$$337a + 337b = 2022$$

(2 pont)

Ebből:

$$a + b = 6$$

adódik.

(2 pont)

Tehát a lehetséges számpárok, melyek relatív prímek: $(a; b) = (1; 5)$ vagy $(a; b) = (5; 1)$.

(3 pont)

Így a keresett két természetes szám 337 és 1685 lesz.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy iskola tanulóinak 30%-a fiú. A fiúk 55%-a szemüveges. A. szemüveget nem viselők 73%-a lány. A szemüvegesek, vagy a szemüveget nem viselők vannak többen az iskola tanulói között?

(14 pont)

Megoldás:

Az osztály $30\% \cdot 0{,}55 = 16{,}5\%$-a szemüveges fiú.

(4 pont)

A nem szemüveges fiúk teszik ki az osztály $30\% - 16{,}5\% = 13{,}5\%$-át.

A feltételek alapján ez alkotja a nem szemüvegesek $100\% - 73\% = 27\%$-át.

(5 pont)

Így a nem szemüvegesek összesen az osztály $\frac{27\%}{0{,}135} = 50\%$-át alkotják. Vagyis az iskola tanulói között ugyanannyi szemüveges és nem szemüveges található.

(5 pont)

Összesen: 14 pont

3. Hány x egész szám esetén teljesül az $\frac{|x-1|-1}{|x-1|} \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség?

(16 pont)

Megoldás:
Az egyenlőtlenségnek nincs értelme $x = 1$ esetén. Így ez nem lehet megoldás.

(3 pont)

Mivel $|x-1|$ pozitív, ezért szorozhatunk vele:

(2 pont)

$$2|x-1| - 2 \leq |x-1|$$
$$|x-1| \leq 2$$

(3 pont)

Így:

$$-2 \leq x - 1 \leq 2$$

amiből

$$-1 \leq x \leq 3$$

(4 pont)

Mivel az 1 nem lehet megoldás, ezért ebben az intervallumban
a -1, 0, 2, és 3, azaz négy egész szám tesz eleget az egyenlőtlenségnek.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. Van-e olyan n természetes szám, melyre teljesül a következő egyenlőség:

$$\frac{2^{2n} + 2^{2n-1} + 2^{2n-2} + 2^{2n-3}}{2^{n-4} + 2^{n-5} + 2^{n-6} + 2^{n-7}} = 2022$$

(18 pont)

Megoldás:
A kifejezés baloldalát alakítsuk át a következő módon:

$$\frac{2^{2n-3}(2^3 + 2^2 + 2 + 1)}{2^{n-7}(2^3 + 2^2 + 2 + 1)} = 2022$$

(7 pont)

Az azonos tényezőkkel egyszerűsítve:

$$2^{n-4} = 2022$$

adódik.

(7 pont)

Az egyenlet bal oldala 2-nek egész kitevős hatványa, a jobb oldala viszont nem, így nem létezik a feltételeknek eleget tevő természetes szám.

(4 pont)

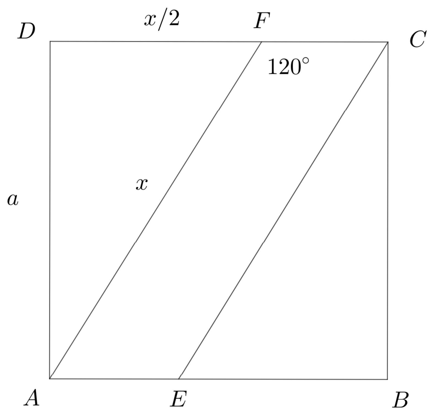
Összesen: 18 pont

5. Egy négyzetből kivágunk egy paralelogrammát, melynek egy szöge 120°-os és két oldala a négyzet egy-egy oldalára illeszkedik. Legfeljebb hány százaléka a paralelogramma területe a négyzet területének?

(18 pont)

Megoldás:

A legnagyobb területű és a feltételeknek megfelelő paralelogramma az ábrának megfelelően helyezkedik el.



(4 pont)

A jelöléseket használva és figyelembe véve, hogy az *AFD* derékszögű háromszög hegyesszögei: 30° és 60°:

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a$$

Ebből:

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$$

(4 pont)

Mivel Az *AFD* és *EBC* háromszögek egybevágóak, ezért ezek együttes területe:

$$t = a \cdot \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} a^2$$

(4 pont)

Így a paralelogramma területe:

$T = a^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} a^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} a^2 \approx 0{,}423\ a^2$

ami a négyzet területének körülbelül a 42,3%-a.

(6 pont)

Összesen: 18 pont

6. Adott a $H = \{1; 2; 3; \dots . 21\}$ halmaz. Felbontható-e a H olyan közös elemmel nem rendelkező részhalmazokra, melyekben a legnagyobb elem az adott részhalmazba tartozó összes többi elem összegével egyenlő? (A részhalmazok uniója kiadja a H halmazt.)

(20 pont)

Megoldás:

Vegyünk egy feltételeknek megfelelő részhalmazt. Ebben teljesül, hogy az összes elemének összege a legnagyobb elemének kétszerese, azaz páros szám lesz. Így minden ilyen részhalmaz rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

(6 pont)

A H halmaz összes elemének összegét megkaphatjuk a részhalmazok elemeinek összegeként. Mivel páros számokat adunk össze, ennek az eredménye is páros lesz.

(4 pont)

A H halmaz eleminek összege viszont:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 21 = \frac{(1+21)\cdot 21}{2} = 231,$$

ami páratlan.

(6 pont)

Emiatt a feltételeknek megfelelő felbontás nem lehetséges.

(4 pont)

Összesen: 20 pont