11. évfolyam gimnázium

Pontozási útmutató

1. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog kezet). Az üdvözlések során egy adott pillanatban kiderül, hogy még mindenkinek négy kézfogása van hátra és eddig 168 kézfogás történt. Hány résztvevője van a bankettnek?

Megoldás:

Ha n résztvevő van, akkor mindenki n - 1 kézfogást ad. (2 pont)

Mivel az adott pillanatban mindenkinek még 4 kézfogása van hátra, ezért eddig mindenki n – 5 kézfogást adott, így (3 pont)

$$\frac{n(n-5)}{2}=168$$ (2 pont)

$$n^2-5n-336=0$$ (1 pont)

Az egyenlet pozitív megoldása a 21.

Tehát 21 résztvevője van a bankettnek. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 10 pont

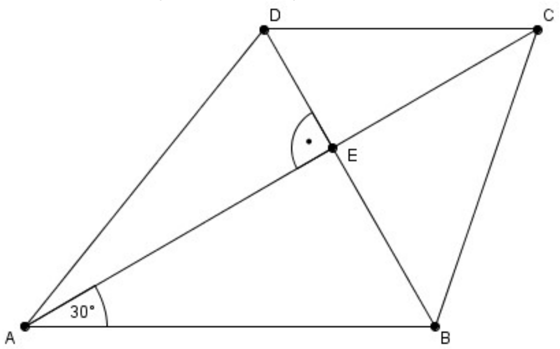
2. Egy trapéz alapjai 12 cm és 8 cm hosszúak. Az egyik átló 30°-os szöget zár be az alappal és merőleges a másik átlóra.

a) Hány cm hosszú a trapéz két átlója?

b) Mekkora a trapéz területe?

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit!



Az ABE háromszög A-nál lévő szöge 30°-os, ezért EB = 6 cm. (2 pont)

Az $AE=\sqrt{3}\cdot 6$ cm. (1 pont)

A DCE háromszögben C-nál lévő szöge 30°-os, ezért ED = 4 cm. (2 pont)

Az $CE=\sqrt{3}\cdot 4$ cm. (1 pont)

Így $BD = 10$ cm, $AC = \sqrt{3} \cdot 10$ cm. (2 pont)

b) Mivel a trapéz átlói merőlegesek egymásra ezért a területe:

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = 50 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$ (2 pont)

Összesen: **10 pont**

3. Adva van egy 2022 oldalú konvex sokszög és belsejében 11 pont úgy, hogy a sokszög csúcsai és a 11 pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. Felhasználva a sokszög csúcsait és a 11 pontot, bontsuk fel a sokszöget olyan háromszögekre, amelyeknek csúcsai az előbbi 2033 pont közül valók. Hány háromszöget kapunk?

<u>Megoldás:</u>

Ha egy pontot helyezünk el a sokszög belsejében és azt összekötjük a sokszög csúcsaival, akkor 2022 db háromszöget kapunk. (1 pont)

Ha a második pontot is elhelyezzük, akkor ez valamelyik háromszögben lesz (oldalon nem lehet, mert akkor három pont egy egyenesre illeszkedne). (2 pont)

Ezt a pontot összekötve a háromszög csúcsaival, a háromszög „megszűnik", de három új keletkezik. (2 pont)

Így folytatva minden pont elhelyezésével (az első kivételével) kettővel nő a háromszögek száma. Az összes háromszög: 2022 + (11 – 1)·2 = 2042. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy a felbontások száma független a felbontás részleteitől. Ha a felbontás után N háromszöget kapunk, akkor az N darab háromszög belső szögeinek összege az eredeti sokszög belső szögei, illetve azoknak részeiből, továbbá a belső pontoknál fekvő teljes szögek részeiből tevődnek össze. A 2022 oldalú sokszög szögeinek összege és a 11 belső pontnál fekvő teljes szögek összege pontosan megadja az N darab háromszög belső szögeinek összegét. (2 pont)

$\mathrm{N} \cdot 180° = (2022 - 2)180° + 11 \cdot 360°.$

Ebből N=2020+22=2042. Független a felbontás részleteitől. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x^2y - 4x^3 = 2023$ az egész számok halmazán.

b) $x^2 - y^2 - 2x = 10$ a természetes számok halmazán.

<u>Megoldás:</u>

a) Írjuk fel a baloldali összeget szorzatalakban:

$$x^2(y - 4x) = 2023$$ (1 pont)

Bontsuk fel a 2023-at két egész szám szorzatára, melyek közül az egyik négyzetszám. (1 pont)

$2023 = 1*2023 = 17^2*7$ (1 pont)

A két felbontásból: $x_1 = \pm 1, y_1 = 2023; x_2 = \pm 17, y_2 = 75$. (2 pont)

b) Alakítsuk át az egyenletet!

$$(x-1)^2 - y^2 = 11 \quad \text{(1 pont)}$$

$$(x-1-y)(x-1+y) = 11 \quad \text{(1 pont)}$$

A 11 két természetes szám szorzatára csak egyféleképpen bontható fel, $1 \cdot 11$, így a megoldást az

$$x-1-y=1$$
$$x-1+y=11$$

Egyenletrendszer megoldása adja. (2 pont)

(A másik párosítás esetén nem kapunk pozitív megoldást.)

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 7, y = 5$. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Egy csupa fiúból álló osztályban 18-an sakkoznak, 23-an fociznak, 21-en bicikliznek és 17-en túráznak. Tudjuk, hogy 9 olyan fiú van, aki sakkozik és focizik 7, aki sakkozik és biciklizik, 6, aki sakkozik és túrázik, 12, aki biciklizik és focizik, 9-en fociznak és túráznak és 12-en vannak, akik bicikliznek és túráznak is. A sakkot a biciklizést és a focit 4-en, a sakkot a focit és a túrázást 3-an, a sakkot a biciklizést és a túrázást 5-en, a focit a biciklizést és a túrázást 7-en tekintik kedvenc szabadidős elfoglaltságuknak. Van három olyan fiú, aki mindegyik sportnak hódol. Tudjuk végül, hogy a négy közül legalább az egyiket mindegyik fiú űzi. Hány fiú van az osztályban?

Megoldás:

Jelölje S a sakkozók halmazát, melynek számossága $|S| = 18$, F a focizók halmazát, melynek számossága $|F| = 23$, B a biciklizők halmazát, melynek számossága $|B| = 21$, T a túrázók halmazát, melynek számossága $|T| = 17$. (1 pont)

A feltételekben szereplő metszethalmazok számosságai: $|S \cap F| = 9$, $|S \cap B| = 7$, $|S \cap T| = 6$, $|B \cap F| = 12$, $|F \cap T| = 9$, $|B \cap T| = 12$, $|S \cap B \cap F| = 4$, $|S \cap F \cap T| = 3$, $|S \cap B \cap T| = 5$, $|F \cap B \cap T| = 7$, $|S \cap B \cap F \cap T| = 3$. (3 pont)

A négy halmaz egyesített halmazának számosságára a szitaformulát alkalmazva:

$$|S \cup B \cup F \cup T| = |S| + |F| + |B| + |T| - (|S \cap F| + |S \cap B| + |S \cap T| + |B \cap F| + |F \cap T| + |B \cap T|) +$$
$$|S \cap B \cap F| + |S \cap F \cap T| + |S \cap B \cap T| + |F \cap B \cap T| - |S \cap B \cap F \cap T| =$$

(4 pont)

$$= 18 + 23 + 21 + 17 - (9 + 7 + 6 + 12 + 9 + 12) + 4 + 3 + 5 + 7 - 3 = 40 \quad \text{(1 pont)}$$

Az osztályba 40 fiú tanuló jár. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Tekintsük az $x^2+2(m-2)x+m^2-4m-21=0$ másodfokú egyenletet, ahol m valós paraméter.

a) Bizonyítsuk be, hogy az egyenlet valós gyökeinek különbsége nem függ m-től!

b) Határozzuk meg m azon értékét, melyre az egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális!

Megoldás:

a) A megoldó képlet alapján:

$$x_{1;2}=\frac{-2m+4\pm\sqrt{4m^2-16m+16-4m^2+16m+84}}{2}=-m+2\pm5$$ (2 pont)

A két gyök különbsége ±10, ami független m-től. (2 pont)

b) Az a) rész alapján $D>0$, így minden m-re van valós gyöke az egyenletnek.

(2 pont)

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=[-2(m-2)]^2-2(m^2-4m-21)=$$

$$=4m^2-16m+16-2m^2+8m+42=2m^2-8m+58=2(m-2)^2+50$$ (3 pont)

A valós gyökök négyzetösszege akkor minimális, ha $m=2$. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

2. megoldás az a) részre:

A Viéte-formulák alapján:

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4(m-2)^2-4(m^2-4m-21)=100,$$

$$|x_1-x_2|=10.$$ (4 pont)