11. évfolyam technikum

Pontozási útmutató

1. Egy csokoládégyárban két gépsoron 2012. november 5-én kezdték el gyártani a 85 gramm tömegű csokimikulásokat. A gyártás utolsó fázisában megmérik minden csokimikulás tömegét és, ha annak tömege kevesebb, mint 83 gramm, akkor csomagolás nélkül visszakerül az olvasztóba. Az első nap a két gépsoron összesen 26400 csokimikulást gyártottak, amiből 636-ot nem csomagoltak be. Az egyik gépsoron gyártott mikulások 2%-a, míg a másikon gyártott mikulások 3%-a volt selejtes. Hány selejtes mikulást gyártottak az egyik, illetve a másik gépsoron?

Megoldás:

Jelölje az első gépsoron gyártott mikulások számát x, a másikon gyártottakét $26400-x$.
(1 pont)
A selejtek száma: $0{,}02\cdot x$, illetve $0{,}03\cdot(26400-x)$. (2 pont)
A feltételekből: $0{,}02\cdot x + 0{,}03\cdot(26400-x) = 636$. (1 pont)
Összevonás és rendezés után: $-0{,}01x = -156$ (2 pont)
Az első gépsoron gyártott mikulások száma 15600, a másodikon gyártottaké 10800
(1 pont)
Az első gépsoron gyártott selejtek száma $0{,}02\cdot 15600 = 312$ (1 pont)
A második gépsoron gyártott selejtek száma $0{,}03\cdot 10800 = 324$ (1 pont)
Ezek összege 636. (1 pont)
Összesen: 10 pont

2. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog kezet). Az üdvözlések során egy adott pillanatban kiderül, hogy még mindenkinek négy kézfogása van hátra és eddig 168 kézfogás történt. Hány résztvevője van a bankettnek?

Megoldás:

Ha n résztvevő van, akkor mindenki $n - 1$ kézfogást ad. (2 pont)
Mivel egy adott pillanatban mindenkinek még 4 kézfogása van hátra, ezért eddig mindenki $n-5$ kézfogást adott, így (3 pont)

$$\frac{n(n-5)}{2} = 168$$ (2 pont)

$$n^2 - 5n - 336 = 0$$ (1 pont)

Az egyenlet pozitív megoldása a 21.
Tehát 21 résztvevője van a bankettnek. (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)

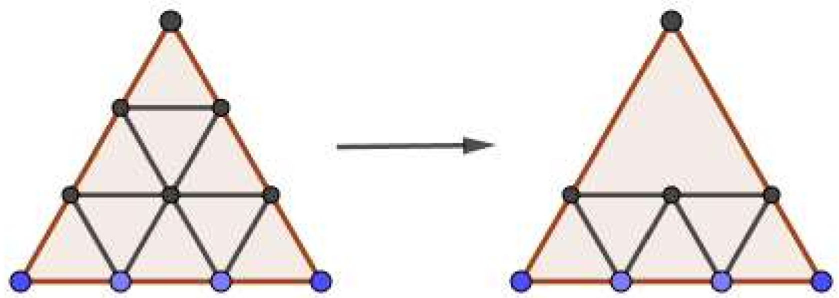
Összesen: 10 pont

3. Feldarabolható-e egy szabályos háromszög

a) 2022 szabályos háromszögre?
b) Bizonyítsuk be, hogy a szabályos háromszög felbontható 6, illetve 8 szabályos háromszögre is.

Megoldás:

a) Bármely szabályos háromszög az oldalfelező pontjait összekötő szakaszokkal négy szabályos háromszögre bontható, ami azt jelenti, hogy a felbontásban szereplő szabályos háromszögek száma 3-mal mindig növelhető. (2 pont)
Az oldalak harmadoló pontjait összekötve 9 szabályos háromszögre tudunk bontani egy szabályos háromszöget, ami 8-cal növeli a szabályos háromszögek számát egy felbontásban. (2 pont)
Így bármely szabályos háromszög biztosan felbontható 4, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18,…, 2022 szabályos háromszögre. (2 pont)
b) Az oldalak megfelelő harmadoló pontjait összekötve a kapott 9 szabályos háromszögből négyet egyesítve a hatra való bontás adódik, lásd ábra. (2 pont)



Hasonlóan az előzőhöz:

Osszuk fel a szabályos háromszög mindegyik oldalát 4 egyenlő részre és ezek közül a megfelelő pontokat összekötve látjuk, hogy 16 darab szabályos háromszögre felbontható a háromszög. Az egyik csúcsnál fekvő 9 darabot egynek tekintve összesen 8 háromszöget kapunk. (2 pont)

Megjegyzés: fentiekből adódik a 11 részre való bontás. Tehát 2, 3, és 5 kivételével minden pozitív egész szám lehet a darabolásnál kapott szabályos háromszögek száma.

Összesen: **10 pont**

4. Adott az $\frac{a}{b}$ tört, ahol a, b pozitív egész számok. Ha a tört számlálóját 7-tel növeljük és a nevezőjét 7-tel csökkentjük, akkor az $\frac{a}{b}$ tört reciprokát kapjuk. Hány ilyen tört van, amelyre $\frac{b}{a} > \frac{290}{289}$?

Megoldás:

A megadott feltételek alapján felírható az $\frac{a+7}{b-7} = \frac{b}{a}$ egyenlet ($b \neq 7$), amelyből $a^2 + 7a = b^2 - 7b$ következik. (1 pont)

Ezt 0-ra rendezve az $a^2 - b^2 + 7(a + b) = 0$ egyenletet kapjuk, melynek bal oldala szorzattá alakítható:

(1) $(a + b) \cdot (a - b + 7) = 0.$ (2 pont)

Mivel az *a, b* pozitív egészek, ezért (1)-ből $a - b + 7 = 0$ adódik, azaz

(2) $b = a + 7$ (2 pont)

A $\frac{b}{a}$ törtet (2) segítségével a következő alakba írhatjuk: $\frac{b}{a} = \frac{a+7}{a} = 1 + \frac{7}{a}$. (1 pont)

Azoknak a pozitív egész *a* számoknak a számát keressük, melyekre $\frac{b}{a} = 1 + \frac{7}{a} > \frac{290}{289}$.

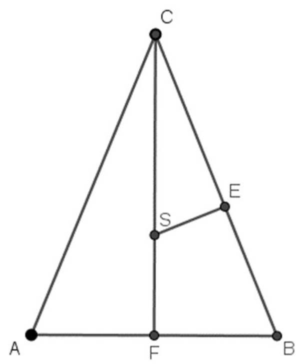
Az $1 + \frac{7}{a} > \frac{290}{289}$ egyenlőtlenségből adódik, hogy a < 2023 (2 pont)

Így összesen 2022 darab, a feladat feltételeinek megfelelő pozitív egész *a* szám van, (2) alapján ugyanennyi a megfelelő pozitív *b* számok száma is. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 20 cm, szárai 26 cm hosszúak. Mekkora a súlypontnak a háromszög oldalaitól mért távolsága?

Megoldás:



Az *AFC* derékszögű háromszögben: $FC = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ cm. *S* súlypont, ezért *SF* = 8 cm, és *SC* = 19 cm. (4 pont)

*SEC*Δ~*BFC*Δ, mert derékszögűek és egy szögük közös (2 pont)

Ezért $\frac{SE}{FB} = \frac{SC}{BC}$, ahonnan $SE = \frac{16 \cdot 10}{26} \approx 6{,}15$ cm. (4 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Számítsa ki a

$$\frac{2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2019^2 + \cdots + 2^2 - 1^2}{2022 - 2021 + 2020 - 2019 + \cdots + 2 - 1}$$

tört pontos értékét!

Megoldás:

A számláló tagjait párosítsuk és alakítsuk szorzattá a párokat:

$(2022 + 2021)(2022 - 2021) + (2020 + 2019)(2020 - 2019) + \cdots + (2 + 1)(2 - 1) = 4043 + 4039 + \cdots + 3 = \frac{4043+3}{2}1011 = 2045253$ (6 pont)

A nevezőben 1011 egy értékű pár készíthető, így a nevező értéke 1011 (3 pont)
A tört pontos értéke: 2023 (1 pont)
Összesen: **10 pont**