12. évfolyam gimnázium

Pontozási útmutató

1. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után és sorban leírjuk a dobott pöttyök számát, ezzel így ötjegyű számsorozatot kapunk.

a) Hányféle számsorozatot kaphatunk?

b) Hányféle olyan sorozatot kaphatunk, melyekben pontosan egy kettes szerepel?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első helyen, a többi helyen álló számtól különböző szám áll?

Megoldás:

a) Minden dobás hatféle lehet, így összesen 6^5 =7776 számsorozatot kaphatunk. (2 pont)

b) Az egy kettes helyére öt lehetőség van, a többi helyre öt számjegy kerülhet, így a feltételnek megfelelő számsorozatok száma: $5 \cdot 5^4 = 3125$ (3 pont)

c) Az első helyen hatféle számjegy állhat, míg a többi helyen ötféle szám. (1 pont)
Ezért a kedvező esetek száma $6 \cdot 5^4 = 3750$. (2 pont)

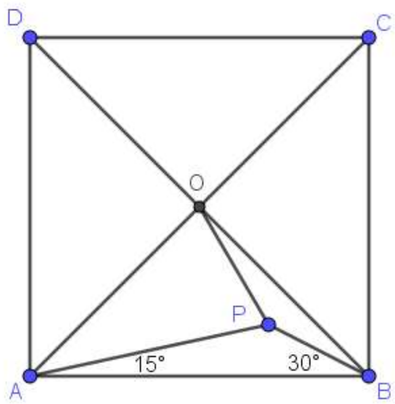
A kérdéses valószínűség $P = \dfrac{6 \cdot 5^4}{6^5} = 0{,}482$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Az egységnyi oldalú *ABCD* négyzet belső *P* pontjára teljesül, hogy $PAB\angle = 15^\circ$ és $PBA\angle = 30^\circ$. A négyzet középpontját *O*-val jelölve, mekkorák *az APO* háromszög szögei?

Megoldás:

Készítsünk megfelelő ábrát!



Jó ábráért. (1 pont)

A feltételek miatt az *APB* szög 135°. (1 pont)

Írjuk fel a szinusztételt az ABP háromszögre: $AP : a = \sin 30^\circ : \sin 135^\circ$. (Az $ABCD$ oldalhosszát jelöle a.) (3 pont)

Felhasználva, hogy $\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért $AP = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 pont)

Ugyanakkor $AO = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ (a négyzet átlójának a fele), így APO háromszög egyenlő szárú. (2 pont)

Mivel PAO szög 30°, APO szög 75° és POA szög 75°. (1 pont)

Összesen: 10 pont

3. Az ABC háromszög C csúcsból induló belső szögfelezője illeszkedik az $y = x$ egyenesre. Határozzuk meg a háromszög C csúcsának koordinátáit, ha $A(12;-1)$ és $B(6;14)$!

Megoldás:

Ha a C csúcsból induló szögfelezőre tükrözzük az A, illetve a B csúcsot, akkor A' illeszkedik a BC oldal egyenesére, illetve B' illeszkedik a AC oldal egyenesére (2 pont)

Mivel a C-ből induló szögfelező illeszkedik az $y = x$ egyenesre, ezért $A'(-1;12)$, $B'(14;6)$. (2 pont)

Az $A'B$ egyenes és a $y = x$ egyenes metszéspontja adja a C pontot. (1 pont)

$A'B$ egyenes egyenlete: $\mathbf{v}_{BC} = (7;2)$: $2x - 7y = -86$, így (2 pont)

Az egyenletrendszer megoldása:

$$-5y = -86,\ y = \frac{86}{5},\ x = \frac{86}{5}$$ (2 pont)

Tehát a keresett $C\left(\frac{86}{5};\frac{86}{5}\right)$. (1 pont)

Összesen: 10 pont

4. Tekintsük az $f : R \to R, f(x) = (p-2)x^2 + (2p+1)x + \frac{3}{4}p + 2$ másodfokú függvényeket, ahol p 2-től különböző valós szám.

a) Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre a másodfokú függvénynek nincs közös pontja az x tengellyel?

b) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekre a p lehetséges értékeihez tartozó függvények mindegyike illeszkednek!

c) Határozzuk meg p értékét úgy, hogy a $(p-2)x^2 + (2p+1)x + \frac{3}{4}p + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek a négyzetösszege $\frac{5}{2}$ legyen!

Megoldás:

a) Írjuk fel a másodfokú kifejezés diszkriminánsát!

$D=(2p+1)^2-4(p-2)\left(\frac{3}{4}p+2\right)=4p^2+4p+1-3p^2-2p+16=p^2+2p+17=$

$(p+1)^2+16$

Ez minden p értékre pozitív, ami azt jelenti, hogy az f függvénynek mindig két zérus helye van. Tehát nincs olyan p, amelyre nincs közös pont az x tengellyel. (3 pont)

b) $f(x)$-et rendezzük p-re!

$$f(x)=\left(x^2+2x+\frac{3}{4}\right)p-2x^2+x+2,$$ (1 pont)

ami akkor független p-től, ha p együtthatója 0, azaz $x^2+2x+\frac{3}{4}=0$ esetén.

Ez $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-\frac{3}{2}$ esetén teljesül (2 pont)

A keresett pontok: $P_1\left(-\frac{1}{2};1\right), P_2\left(-\frac{3}{2};-4\right)$. (1 pont)

c) $x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{2p+1}{p-2}\right)^2-2\frac{\frac{3}{4}p+2}{p-2}=\frac{\frac{5}{2}p^2+3p+9}{(p-2)^2}=\frac{5}{2}$

Ahonnan $p=\frac{1}{13}$. (3 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet!

$$\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y^2+\cos x\right)^2=0$$

Megoldás:

Két nemnegatív szám összege csak úgy lehet 0, ha mindkettő 0. (1 pont)

A $\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)^2=0$, ha $|\sin x|=0{,}5$, ekkor $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, vagy $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (3 pont)

Az $\left(y^2+\cos x\right)=0$ miatt csak a $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehetséges,

az ehhez tartozó x értékek: (2 pont)

$x_1=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\quad x_2=\frac{7\pi}{6}+l2\pi$, ahol k, l egész számok. (2 pont)

Minden x értékhez két y érték tartozik, amik $y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Hány olyan x valós szám van, amelyre a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1024} - \sqrt{x^2 + 1}$$

függvény egész értéket vesz fel?

<u>Megoldás:</u>

Alakítsuk át az $f(x)$ függvényt a számláló gyöktelenítésével:

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1024} - \sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1024} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1024} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1023}{\sqrt{x^2 + 1024} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(4 pont)

Az $f(x)$ páros függvény, mert $f(x) = f(-x)$. (2 pont)

Ha $x > 0$, akkor a függvény szigorúan monoton csökken, $x = 0$ esetén a függvénynek maximuma van. $f(0) = 31$. (2 pont)

Mivel $f(x) > 0$, a lehetséges egész függvényértékek: 1, 2, 3, … ,30 (ezeket két helyen veszi fel a függvény) és a 31. (1 pont)

Tehát összesen 2*30 + 1 = 61 helyen vesz fel a függvény egész értéket. (1 pont)

Összesen: 10 pont