12. évfolyam technikum

Pontozási útmutató

1. Határozzuk meg azokat a háromjegyű számokat, amelyek egyenlők számjegyei összegének a 23-szorosával.

Megoldás:

Írjuk fel a feltételt a helyi értékekkel:

$$100a + 10b + c = 23(a + b + c).$$ (2 pont)

Rendezzük az egyenletet a következő alakra:

$$11(7a - 2c) = 13b$$ (2 pont)

Mivel (11;13) = 1, ezért 11|*b*. tekintettel arra, hogy *b* számjegy, *b* = 0. Amiből (2 pont)

$7a - 2c = 0$ következik. (1 pont)

Figyelembe véve a feltételeket ez az egyenlőség, csak *c* = 7 és *a* = 2 esetén teljesül. (2 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Válasz: A feltételeknek egyetlen háromjegyű szám felel meg, a 207.

Összesen: 10 pont

2. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fogott kezet). Két meghívott más elfoglaltsága miatt nem tudott részt venni a banketten, így a lehetséges kézfogások száma 35-tel csökkent. Hány embert hívtak meg a bankettre?

Megoldás:

Ha a két lemondás után *n* résztvevő maradt, akkor mindenki *n* - 1 kézfogást adott, s ez összesen $\frac{n(n-1)}{2}$ kézfogás. (2 pont)

Eredetileg *n* + 2 résztvevő volt, ez $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ kézfogást jelent. (1 pont)

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + 35$$ (3 pont)

$$(n+2)(n+1) = n(n-1) + 70$$ (1 pont)

$$n^2 + 3n + 2 = n^2 - n + 70$$

$$4n = 68$$ (1 pont)

$$n = 17$$

Tehát 19 meghívott volt a bankettre. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 10 pont

3. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után és sorba leírjuk a dobott pöttyök számát, így ötjegyű számsorozatot kapunk.

a) Hányféle számsorozatot kaphatunk?

b) Hányféle sorozatot kaphatunk, melyekben pontosan egy kettes szerepel?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első helyen, a többi helyen álló számtól különböző szám áll?

<u>Megoldás:</u>

a) Minden dobás hatféle lehet, így összesen 6^5 =7776 számsorozatot kaphatunk. (2 pont)

b) Az egy kettes helyére öt lehetőség van, a többi helyre öt számjegy kerülhet, így a feltételnek megfelelő számsorozatok száma: $5\cdot5^4 = 3125$ (3 pont)

c) Az első helyen hatféle számjegy állhat, míg a többi helyen ötféle szám. (1 pont)

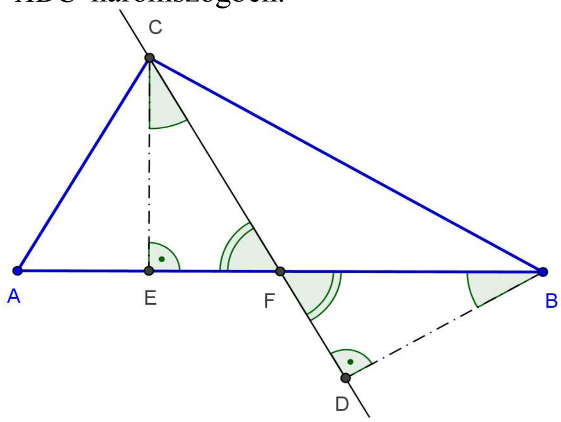
Ezért a kedvező esetek száma $6\cdot5^4 = 3750$. (2 pont)

A kérdéses valószínűség $P = \frac{6\cdot5^4}{6^5} = 0{,}482$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

4. Az ABC háromszögben az AB oldal kétszer olyan hosszúságú, mint az AC oldal. Tudjuk, hogy a C pont ugyanolyan távol van az AB oldal egyenesétől, mint a B pont a C pontból induló súlyvonal egyenesétől. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

<u>Megoldás:</u> A feltételeknek megfelelő ábrát készítettünk, ahol F az AB oldal felezőpontja, és így CF egyenese súlyvonal az ABC háromszögben.



(1 pont)

A CFE és BFD háromszögek szögei egyenlők, mert a két háromszögben van egy-egy derékszög és a $CFE\angle$ illetve a $BFD\angle$ csúcsszögek, tehát egyenlők, ebből következően a két háromszög harmadik szögei is egyenlők, hiszen minden háromszögben a belső szögek összege $180°$. (1 pont)

A feltételek szerint $CE = BD$, így a CFE és BFD háromszögekben egy-egy megfelelő szöggel szemközti oldal hosszúsága is megegyezik, ezért a két háromszög egybevágó, tehát a többi megfelelő oldal hosszúsága is egyenlő.

Ezek szerint például $CF = BF$, vagyis a BCF háromszög egyenlő szárú. (2 pont)

Ugyanakkor az $AB = 2\cdot AC$ feltételből $AF = AC$ illetve $AF = BF$ következik, de $CF = BF$ miatt azt kapjuk, hogy $AF = AC = CF$ is teljesül, vagyis az AFC háromszög szabályos, amelynek szögei $60°$-osak. (2 pont)

Ezért $AFC\angle = 60°$, ez a szög egyúttal külső szöge a BCF háromszögnek, amely a fentiek szerint egyenlő szárú. A külső szögekre vonatkozó tétel szerint ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $FBC\angle = FCB\angle = 30°$. (2 pont)

Így az ABC háromszög szögei a következők: $ABC\angle = 30°$; $BAC\angle = 60°$, végül $ACB\angle = 90°$. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Háromszögszámoknak nevezzük a $h_1 = 1,\ h_2 = 1+2,\ h_3 = 1+2+3,\ ...,\ h_n = 1+2+3+...+n$, stb. számokat. Számítsuk ki az első 2022 háromszögszám reciprokának az összegét!

Megoldás:

A $h_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ n-edik háromszögszám zártalakja. (2 pont)

A zártalak segítségével az összeget felírva:

$$S = 2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2022\cdot 2023}\right)$$ (2 pont)

Felhasználva, hogy $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (2 pont)

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} =$$ (2 pont)

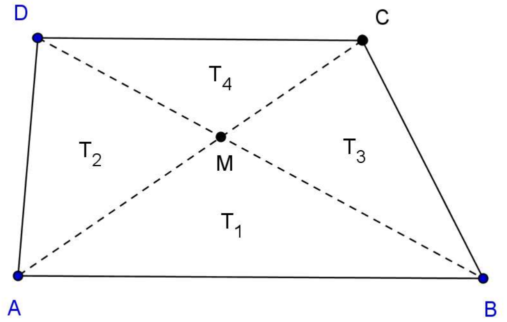
$$= 2\cdot\left(1 - \frac{1}{2023}\right) = \frac{4044}{2023}$$ (2 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Az *ABCD* trapéz *AC* és *BD* átlói az *M* pontban metszik egymást. Az *ABM* és *ADM* háromszögek területének aránya 8 : 7. Mekkora a trapéz területe, ha a *CDM* háromszög területe 2023 területegység?

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók.



(1 pont)

A feltételek szerint $T_1 : T_2 = 8 : 7$, ezért $T_1 = (8 : 7)\cdot T_2$. (1 pont)

Mivel az *ABC* és *ABD* háromszögek *AB* alapja és az ehhez tartozó magasságuk az *AB* és *CD* szakaszok párhuzamossága miatt egyenlő, ezért $T_1 + T_2 = T_1 + T_3$, azaz $T_2 = T_3$, tehát az *ADM* és *BCM* háromszögek területe egyenlő. (2 pont)

Az *ABM* és *ADM* háromszögek területének aránya megegyezik a *BM* és *DM* szakaszok arányával, hiszen a két háromszög ezen oldalakhoz tartozó magassága egyenlő. Ez azt is jelenti, hogy $BM : DM = 8 : 7$. (1 pont)

Ugyanakkor $T_3 : T_4 = 8 : 7$ is fennáll, mert a *BCM* és *CDM* háromszögek *BM* és *DM* szakaszokhoz tartozó magassága ugyancsak egyenlő. Eszerint $T_2 = T_3 = (8 : 7) \cdot T_4$. (1 pont)

Tudjuk, hogy $T_4 = 2023$, ezért $T_2 = T_3 = (8 : 7) \cdot 2023 = 2312$, területegység. A $T_1 = (8 : 7) \cdot T_2 = 2642\frac{2}{7}$ területegység. (2 pont)

Az *ABCD* trapéz területe tehát $T_1 + 2 \cdot T_2 + T_4 = 2642\frac{2}{7} + 4624 + 2023 = 9289\frac{2}{7}$ területegység. (2 pont)

Összesen: **10 pont**