(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Bori édesapja két és félszer annyi idős most, mint Bori. 9 év múlva már csak kétszer annyi idős lesz. Hány éves most Bori?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje Bori mostani életkorát x. Apja életkora eszerint $2{,}5 \cdot x$.

(2 pont)

A feltételek szerint 9 év múlva:

$$2 \cdot (x + 9) = 2{,}5 \cdot x + 9$$

(4 pont)

Ezt megoldva $x = 18$ adódik.

Tehát Bori most 18 éves.

(5 pont)

Az ellenőrzés ezt igazolja.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

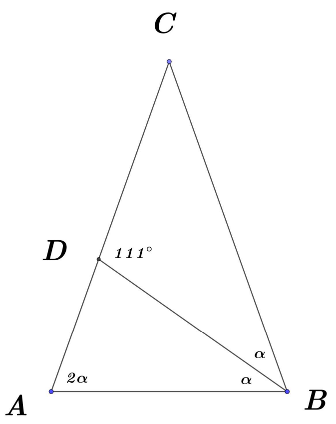
2. Egy egyenlőszárú háromszög alapon levő szögfelezője a szemben levő szárat 111°-os szögben metszi. Mekkorák a háromszög szögei?

(14 pont)

Megoldás:

Az ábrák alapján két esetet különböztethetünk meg.

Az egyik esetben



A feltételek alapján:

$$2 \cdot \alpha + \alpha = 111°$$

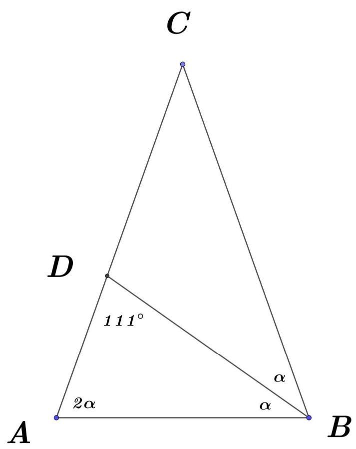
Innét:

$$\alpha = 37°$$

Azaz a háromszög szögei: 74°, 74° és 32°.

(7 pont)

A másik esetben:



A feltételek alapján:

$$2 \cdot \alpha + \alpha + 111° = 180°$$

Innét:

$$\alpha = 23°$$

Azaz a háromszög szögei: 46°, 46° és 88°.

(7 pont)

Összesen: 14 pont

3. A 30-nál nem nagyobb pozitív prímszámok halmazának hány olyan két elemű részhalmaza van, melynek a 2 vagy a 3 eleme?

(16 pont)

Megoldás:

A 30-nál nem nagyobb pozitív prímszámok halmaza $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$. Ennek a halmaznak 10 eleme van.

(4 pont)

A 2-t tartalmazó, de 3-at nem tartalmazó kételemű részhalmazok száma 8, mert a 2 mellé nyolcféle elemet választhatunk.

(4 pont)

Hasonlóan 8 olyan kételemű részhalmaz lesz, ahol a 3 eleme, de a 2 nem eleme a részhalmaznak.

(4 pont)

Egy olyan részhalmaz lesz, ahol a 3 és a 2 is eleme a részhalmaznak.

(2 pont)

Így a feltételeknek megfelelő részhalmazok száma 17 lesz.

(2 pont)

Összesen: 16 pont

Második megoldás

A 30-nál nem nagyobb pozitív prímszámok halmaza $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$. Ennek a halmaznak 10 eleme van.

(4 pont)

Ebből a halmazból (10 · 9) /2 = 45 kételemű részhalmaz választható ki.

(4 pont)

Olyan kételemű részhalmaz, amely nem tartalmazza sem a 2, sem a 3 számot
(8 · 7) / 2 = 28 választható.

(4 pont)

Ezért olyan kételemű részhalmaz, amely vagy a 2, vagy a 3 számot tartalmazza
45 – 28 = 17 választható.

(4 pont)
Összesen 16 pont

4. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyben a számjegyek szorzata 210?

(16 pont)

Megoldás:

Bontsuk fel a 210-et prímtényezőkre: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

(4 pont)

A legkisebb számot akkor kapjuk, ha legkevesebb jegyet használunk fel ehhez.

(3 pont)

Két tényező szorzatának eredménye csak egy esetben lesz egyjegyű: $2 \cdot 3 = 6$ esetén.

(4 pont)

Így a 6, 5 és 7 számjegyek felhasználásával készíthető legkisebb háromjegyű szám az 567 lesz.

(5 pont)
Összesen: 16 pont

5. Egy téglalap oldalainak hosszai egész számok. A területének a mérőszáma kétszerese a kerület mérőszámának. Mekkorák az oldalai?

(20 pont)

Megoldás:

Jelölje a téglalap oldalainak hosszát a és b, ahol $a \leq b$.
A feltételek miatt:

$$ab = 4(a + b) \qquad (*)$$

(4 pont)

Az egyenletet átrendezve és mindkét oldalhoz 16-ot adva:

$$ab - 4a - 4b + 16 = 16$$

(4 pont)

A bal oldal szorzattá alakítható:

$$(a - 4)(b - 4) = 16$$

(4 pont)

A 16 hatféleképpen írható fel két tényező szorzataként, amelyek $a - 4$ és $b - 4$ lehetséges értékeit adják:

$$1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = (-1) \cdot (-16) = (-2) \cdot (-8) = (-4) \cdot (-4) = 16$$

Ezek közül csak az első három esetben kapunk pozitív megoldást az *a* és *b* számpárokra.

(5 pont)

Így a téglalap oldalai 5 és 20, vagy 6 és 12, vagy 8 és 8 hosszúságú lehet.

Az ellenőrzés igazolja, hogy mindhárom eset megfelelő.

(3 pont)

Összesen: 20 pont

/ Ha a (*) egyenletnek próbálgatással találja meg a három megfelelő megoldását, akkor azokért 2-2-2 pontot, tehát összesen 10 pontot kapjon. Ebből rossz megoldásonként 2-2 pontot vonjunk le. /

6. **Egy 11x11-es táblázat minden mezőjébe vagy (+1)-et vagy (-1)-et írunk, majd kiszámoljuk az összes sor- és oszlopösszeget. Legfeljebb hány különböző összeget kaphatunk?**

(20 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Bármelyik sorban illetve oszlopban a beírt számok összege a $[-11; 11]$ intervallumba eső páratlan szám lehet, mivel páratlan sok páratlan számot adunk össze.

(6 pont)

Így az előforduló összegek -11; -9; -7; ... 7; 9; 11 lehetnek, ami 12 féle lehetőség.

(4 pont)

Meg kell mutatni, hogy ez meg is valósítható, azaz készíthető ilyen kitöltés. (Itt az alábbiaktól eltérő helyes megoldás is teljes pontszámot ér.)

Töltsük ki a táblázatot úgy, hogy a főátlóba és afölé mindenhova +1, a főátló alá minden mezőbe -1 kerüljön. Így a sorokban szereplő összegek rendre: 11; 9; 7; ... ; -7; -9 lesznek. Az oszlopokban pedig -9; -7; -5; ... ; 9; 11 szerepel. Ez csak 11 féle összeg, hiszen hiányzik a -11.

(5 pont)

Ha most a táblázat bal felső sarkában a +1-et -1-re változtatjuk, akkor az első oszlopban megjelenik a -11 és az első sor 11-es értéke lesz 9. Mivel 11-es összeg van még egy (az utolsó oszlopban), ezért ez a kitöltés már az összes lehetséges összeget tartalmazni fogja.

(5 pont)

Összesen: 20 pont