

(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

- 1. Bori édesapja két és félszer annyi idős most, mint Bori. 9 év múlva már csak kétszer annyi idős lesz. Hány éves most Bori?**

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje Bori mostani életkorát x . Apja életkora eszerint $2,5 \cdot x$.

(2 pont)

A feltételek szerint 9 év múlva:

$$2 \cdot (x + 9) = 2,5 \cdot x + 9$$

(4 pont)

Ezt megoldva $x = 18$ adódik.

Tehát Bori most 18 éves.

(5 pont)

Az ellenőrzés ezt igazolja.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

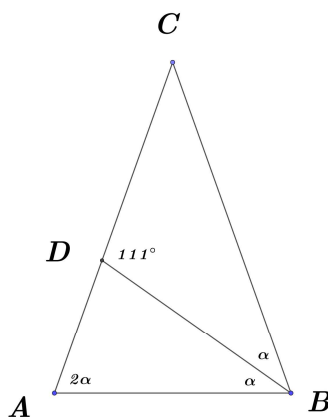
- 2. Egy egyenlőszárú háromszög alapon levő szögfelezője a szemben levő szarat 111° -os szögben metszi. Mekkora a háromszög szögei?**

(14 pont)

Megoldás:

Az ábrák alapján két esetet különböztethetünk meg.

Az egyik esetben



A feltételek alapján:

$$2 \cdot \alpha + \alpha = 111^\circ$$

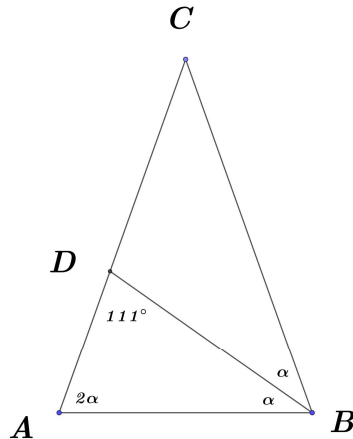
Innét:

$$\alpha = 37^\circ$$

Azaz a háromszög szögei: 74° , 74° és 32° .

(7 pont)

A másik esetben:



A feltételek alapján:

$$2 \cdot \alpha + \alpha + 111^\circ = 180^\circ$$

Innét:

$$\alpha = 23^\circ$$

Azaz a háromszög szögei: 46° , 46° és 88° .

(7 pont)

Összesen: 14 pont

3. A 30-nál nem nagyobb pozitív prímszámok halmazának hány olyan két elemű részhalmaza van, melynek a 2 vagy a 3 eleme?

(16 pont)

Megoldás:

A 30-nál nem nagyobb pozitív prímszámok halmaza $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$. Ennek a halmaznak 10 eleme van.

(4 pont)

A 2-t tartalmazó, de 3-at nem tartalmazó kételemű részhalmazok száma 8, mert a 2 mellé nyolcféle elemet választhatunk.

(4 pont)

Hasonlóan 8 olyan kételemű részhalmaz lesz, ahol a 3 eleme, de a 2 nem eleme a részhalmaznak.

(4 pont)

Egy olyan részhalmaz lesz, ahol a 3 és a 2 is eleme a részhalmaznak.

(2 pont)

Így a feltételeknek megfelelő részhalmazok száma 17 lesz.

(2 pont)

Összesen: 16 pont

Második megoldás

A 30-nál nem nagyobb pozitív prímszámok halmaza $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$. Ennek a halmaznak 10 eleme van.

(4 pont)

Ebből a halmazból $(10 \cdot 9) / 2 = 45$ kételemű részhalmaz választható ki.

(4 pont)

Olyan kételemű részhalmaz, amely nem tartalmazza sem a 2, sem a 3 számot $(8 \cdot 7) / 2 = 28$ választható.

(4 pont)

Ezért olyan kételemű részhalmaz, amely vagy a 2, vagy a 3 számot tartalmazza $45 - 28 = 17$ választható.

(4 pont)

Összesen 16 pont

4. Melyik az a szám, amelyet ha valahány százalékkal megnövelünk, akkor 80-at, majd ezt ugyanannyi százalékkal csökkentve 60-at kapunk eredményül?

(18 pont)

Megoldás:

Jelölje a keresett számot x , a százalékos változás értékét p .

A feltételek miatt:

$$\begin{aligned}x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) &= 80 \\80 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) &= 60\end{aligned}$$

(5 pont)

A második egyenletből:

$$\begin{aligned}\frac{80 \cdot p}{100} &= 20 \\p &= 25\end{aligned}$$

(5 pont)

Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$x \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right) = 80$$

Innét a keresett szám $x = 64$.

(6 pont)

A megoldás helyességét az ellenőrzés igazolja.

(2 pont)

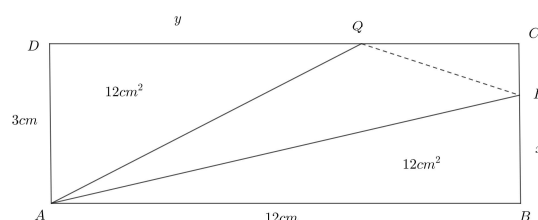
Összesen: 18 pont

5. Egy $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = CD = 12$, $BC = DA = 3$. A BC oldalon felvesszünk egy P pontot, a CD oldalon pedig egy Q pontot úgy, hogy a téglalapot az AP és AQ szakaszok három egyenlő területű részre osztják. Határozzuk meg az APQ háromszög területét!

(18 pont)

Megoldás:

Készítsünk ábrát és legyen $BP = x$ és $DQ = y$.



(3 pont)

Mivel a téglalap területe 36 cm^2 , ezért a három egyenlő területű rész 12 cm^2 területű lesz.

(2 pont)

Az ABP háromszög területe alapján $\frac{12x}{2} = 12$, melyből $x = 2 \text{ cm}$ adódik.

(4 pont)

Hasonlóan az ADQ háromszög területe alapján $\frac{3y}{2} = 12$, melyből $y = 8 \text{ cm}$.

(4 pont)

Ezek miatt $PC = 1 \text{ cm}$ és $QC = 4 \text{ cm}$. Így a QPC háromszög területe: $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \text{ cm}^2$, a keresett APQ háromszög területe: 10 cm^2 lesz.

(5 pont)

Összesen: 18 pont

6. A síkon felvettünk néhány egyenest, majd megszámlálva az egyenesek metszéspontjait 43-at kaptunk. Legalább hány egyenes esetén lehetséges ez?

(20 pont)

Megoldás:

Legkevesebb egyenessel akkor kapunk legtöbb metszéspontot, ha nincs közöttük párhuzamos és nincs olyan metszéspont, melyen kettőnél több egyenes halad át.

(4 pont)

A metszéspontok száma n számú egyenes esetén legfeljebb $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, mert minden egyenes minden másikat metsz, de minden pontot kétszer számoltunk.

(4 pont)

9 egyenes nem elegendő, hiszen ezek metszéspontjainak száma legfeljebb $(9 \cdot 8)/2 = 36$ lesz.
(3 pont)

10 egyenes már elegendő lehet, hiszen ezek legfeljebb 45 metszéspontot határoznak meg.
(3 pont)

Mivel csak 43 metszéspontot számoltunk össze, ez azt jelenti, hogy kell lennie olyan pontnak, ahol kettőnél több egyenes halad át. Ha egy ilyen pont van, akkor éppen 43 lesz a 10 egyenes által meghatározott metszéspontok száma, hiszen a három különböző pontból egy keletkezik.
(6 pont)

Összesen: 20 pont