(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Melyik az a két természetes szám, amelyeknek a számtani közepe és a különbsége is 2024?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot x és y. A feltételek alapján:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=2024 \\ x-y=2024 \end{cases}$$

(5 pont)

Az egyenletrendszert megoldva:

$$x=3036$$
$$y=1012$$

adódik.

(6 pont)

Így a keresett két természetes szám 3036 és 1012 lesz, melyet az ellenőrzés igazol.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy diszkoszvető versenyen az indulók 40%-a teljesítette a döntőbe jutás szintjét. Ha 7-tel kevesebben teljesítették volna a szintet, akkor 4-szer annyi kieső lett volna, mint ahány döntőbe jutó. Hányan indultak a versenyen?

(14 pont)

Megoldás:

A résztvevők száma legyen x. Az első esetben a szintet teljesítők száma $0{,}4x$, míg a kiesők száma $0{,}6x$ lesz.

(2 pont)

A második esetben a továbbjutók száma $0{,}4x-7$, a kiesők száma pedig $0{,}6x+7$ lesz.

A feltételek alapján a felírható egyenlet:

$$4(0{,}4x-7)=0{,}6x+7$$

(4 pont)

Az egyenletet megoldva $x=35$ adódik.

(6 pont)

Tehát a versenyen 35 induló volt, melyet az ellenőrzés is igazol.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. **Két számról tudjuk, ha az első négyzetéhez hozzáadjuk a második négyzetgyökét, akkor az első szám kétszeresénél 1-gyel kisebb számot kapunk. Melyek ezek a számok?**

(16 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot x és y, ahol a négyzetgyökvonás miatt az $y \geq 0$ feltételnek is teljesülnie kell.

(2 pont)

A feltételek miatt:

$$x^2 + \sqrt{y} = 2x - 1$$

(3 pont)

Ezt átrendezve

$$x^2 - 2x + 1 + \sqrt{y} = 0$$

adódik, ahol az első három tag teljes négyzet.

(3 pont)

Így:

$$(x-1)^2 + \sqrt{y} = 0$$

(4 pont)

Mivel $(x-1)^2 \geq 0$ és $\sqrt{y} \geq 0$, így az egyenlőség csak az $x=1$ és $y=0$ esetben teljesülhet, melyet az ellenőrzés igazol.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. **Egy kör alakú asztalnál 7-en ülnek. Mindenki gondol egy egész számra, majd mindenki felírja egy cédulára két szomszédja számának összegét. Lehetséges-e, hogy minden cédulán 2023 álljon?**

(18 pont)

Megoldás:

Mivel mindenkinek két szomszédja van, így minden gondolt számot kétszer vesznek figyelembe. Ez azt jelenti, hogy ezek összege biztosan páros lesz.

(7 pont)

Ha minden cédulán 2023 szerepelne, akkor ezek összege $7 \cdot 2023 = 14161$ lenne, ami páratlan.

(7 pont)

Ez ellentmond annak, hogy az összeg páros. Azaz nem lehetséges, hogy minden cédulán 2023 álljon.

(4 pont)

Összesen: 18 pont

5. **Egy társasjáték készletében olyan kockák vannak, melyek piros és kék oldalakkal rendelkeznek. Hány kockából áll a készlet, ha az összes lehetséges színezés**

előfordul? (Két kockát akkor tekintünk különbözőnek, ha azok forgatással egymásba nem vihetők)

(18 pont)

Megoldás:
Jelölje a piros lapok számát p a kék lapok számát k. Számoljuk az eseteket a p lehetséges értékeit figyelembe véve.
Ha $p=0$, akkor 1 eset van, hasonlóan a $k=0$ esethez. Ez összesen 2 kocka.

(3 pont)

Ha $p=1$, akkor 1 eset van, hasonlóan a $k=1$ esethez. Ez is összesen 2 kocka.

(4 pont)

Ha $p=2$, akkor 2 eset van, hasonlóan a $k=2$ esethez. A piros lapok lehetnek egymással szemben, vagy szomszédosak. Ez összesen 4 kocka.

(4 pont)

Ha $p=3$, akkor a három piros lap kapcsolódhat egy sarokban ez 1 eset. Ha van 2 piros lap egymással szemben az 1 újabb esetet teremt. Így összesen 2 kocka van. Itt nem kell számolnunk a $k=3$ feltétellel, hiszen az a $p=3$ esettel megegyezik.

(4 pont)

Így a készletben található különböző kockák száma 10 lesz.

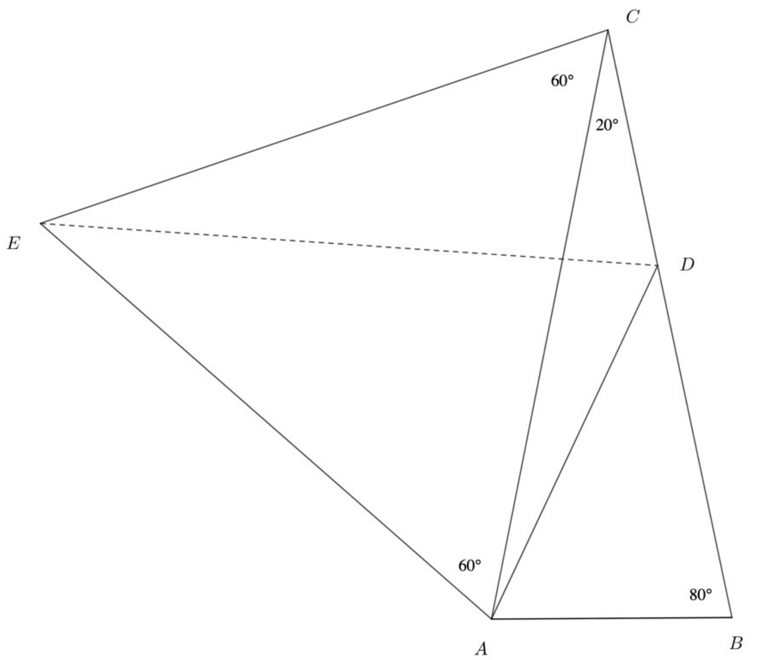
(3 pont)

Összesen: 18 pont

6. **Az *ABC* egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt *C* csúcsban található szög 20°-os. Az *AC* száron található *D* pontra $DC=AB$. Határozzuk meg az $ADB\measuredangle$-et!**

(20 pont)

Megoldás:
Rajzoljuk az adott *ABC* háromszögre az *AC* oldalra kifelé egy szabályos *ACE* háromszöget az ábrának megfelelően.



(4 pont)

Mivel $ABC\measuredangle = BCD\measuredangle = 80°$, és $AB = DC, BC = CE$ egyenlőségeket figyelembe véve megállapítható, hogy az EDC háromszög és az ABC háromszögek egybevágóak, mert két oldaluk és a közbezárt szögük egyenlő.

(5 pont)

Így az EDC háromszög és az ADC háromszög is egyenlő szárú, ahol $EDC\sphericalangle = 80°$.

(5 pont)

Mivel az ADE egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt szög $AED\measuredangle = 40°$, így az alapon levő szög nagysága $EDA\measuredangle = 70°$.

(4 pont)

A keresett szög nagysága így: $ADB\measuredangle = 180° - 80° - 70° = 30°$.

(2 pont)

Összesen: 20 pont