(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. **Melyik az a két természetes szám, amelyeknek a számtani közepe és a különbsége is 2024?**

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot *x* és *y*. A feltételek alapján:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 2024 \\ x - y = 2024 \end{cases}$$

(5 pont)

Az egyenletrendszert megoldva:

$x = 3036$

$y = 1012$

adódik.

(6 pont)

Így a keresett két természetes szám 3036 és 1012 lesz, melyet az ellenőrzés igazol.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. **Egy diszkoszvető versenyen az indulók 40%-a teljesítette a döntőbe jutás szintjét. Ha 7-tel kevesebben teljesítették volna a szintet, akkor 4-szer annyi kieső lett volna, mint ahány döntőbe jutó. Hányan indultak a versenyen?**

(14 pont)

Megoldás:

A résztvevők száma legyen *x*. Az első esetben a szintet teljesítők száma $0{,}4x$, míg a kiesők száma $0{,}6x$ lesz.

(2 pont)

A második esetben a továbbjutók száma $0{,}4x - 7$, a kiesők száma pedig $0{,}6x + 7$ lesz.

A feltételek alapján a felírható egyenlet:

(4 pont)

Az egyenletet megoldva $x = 35$ adódik.

(6 pont)

Tehát a versenyen 35 induló volt, melyet az ellenőrzés is igazol.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. Két számról tudjuk, ha az első négyzetéhez hozzáadjuk a második négyzetgyökét, akkor az első szám kétszeresénél 1-gyel kisebb számot kapunk. Melyek ezek a számok?

(16 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Jelölje a két számot *x* és *y*, ahol a négyzetgyökvonás miatt az $y \geq 0$ feltételnek is teljesülnie kell.

(2 pont)

A feltételek miatt:

$x^2 + \sqrt{y} = 2x - 1$

(3 pont)

Ezt átrendezve

$x^2 - 2x + 1 + \sqrt{y} = 0$

adódik, ahol az első három tag teljes négyzet.

(3 pont)

Így:

$(x - 1)^2 + \sqrt{y} = 0$

(4 pont)

Mivel $(x-1)^2 \geq 0$ és $\sqrt{y} \geq 0$, így az egyenlőség csak az $x = 1$ és $y = 0$ esetben teljesülhet, melyet az ellenőrzés igazol.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok, egy téglalap oldalainak hossza pedig a közéjük eső páratlan számok. A téglalap kerülete 8 cm-el nagyobb, mint a háromszög kerülete. Mekkora ebben az esetben a két síkidom területének különbsége?

(18 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Jelölje a háromszög oldalainak hosszát , a téglalap oldalainak hosszát pedig .

(3 pont)

Így a téglalap és a háromszög kerületének különbsége alapján:

amiből $n = 4$ adódik. A háromszög oldalainak hossza 6 cm, 8 cm és 10 cm, míg a téglalap oldalai 7 cm és 9 cm lesznek.

(7 pont)

Vegyük észre, hogy a háromszög oldalainak hossza pitagoraszi számhármas, így az derékszögű lesz.

(4 pont)

Így a területek különbsége: $9 \cdot 7 - \frac{6 \cdot 8}{2} = 39$ cm^2 lesz.

(4 pont)

Összesen: 18 pont

5. Egy matematika versenyen 20 kérdésből álló teszt feladatsort kell megoldani. Minden helyes válasz 5-5 pontot ér, viszont minden rossz válasz esetén 2-2 pontot levonnak. Ha egy kérdésre nincs válasz, akkor arra 0 pont jár. Legalább hány kérdésre nem válaszolt az a versenyző, akinek 48 pontja lett?

(18 pont)

Megoldás:

A jó válaszok számát *x*, a rossz válaszokét jelölje *y*, és *z* legyen a meg nem válaszolt kérdések száma.

(2 pont)

Az elért pontszám alapján

$5x-2y=48$

egyenlet megoldását keressük a természetes számok halmazán.

(4 pont)

Az egyenletből:

$y=\frac{5x-48}{2}=2x-24+\frac{x}{2}$

azaz $x=2k$ páros szám lehet csak.

(4 pont)

Figyelembe véve, hogy $z=20-x-y$ is csak nemnegatív egész lehet, és $y=5k-24$ így *k* értéke csak kétféle lehet:

$k=5$ esetén $x=10; y=1; z=9$.

$k=6$ esetén $x=12; y=6; z=2$.

(6 pont)

Ez azt jelenti, hogy legalább 2 kérdésre nem adott választ a versenyen induló.

(2 pont)

Összesen: 18 pont

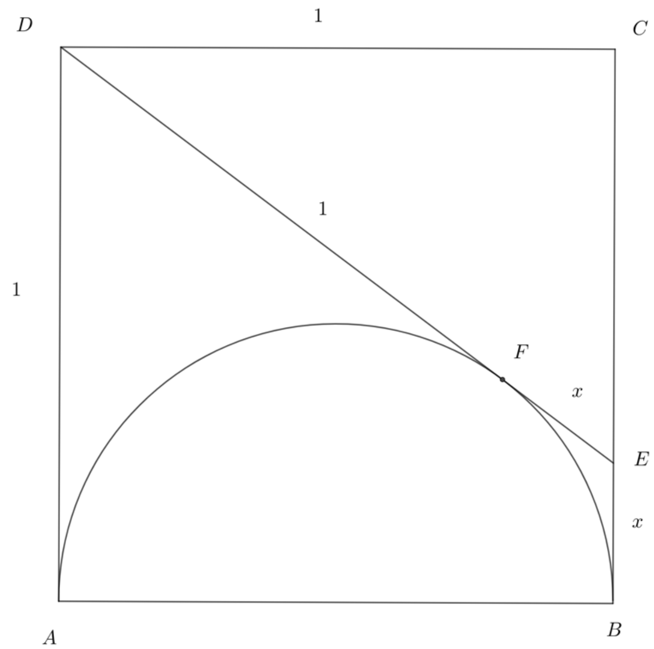
6. Egy egységnyi oldalú *ABCD* négyzet *AB* oldalára a négyzetbe befelé egy *AB* átmérőjű félkört szerkesztünk. A *D* csúcsból a félkörhöz húzott érintő a *BC* oldalt *E* pontban metszi. Mekkora a keletkező *DEC* háromszög területe?

(20 pont)

Megoldás:

Használjuk az alábbi ábra jelöléseit.

Jelölje *x* az *EF* érintő szakasz hosszát!



(3 pont)

Teljesül, hogy $DA = DF = DC = 1$, valamint $EF = EB = x$.

(6 pont)

A *DEC* derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$1 + 1 - x = 1 + x$$

melynek megoldása $x = \frac{1}{4}$.

(7 pont)

3

3

Így a *DEC* háromszög oldalainak hossza: lesz. A területe pedig területegység.

(4 pont)

Összesen: 20 pont