(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. **Egy számhalmaz elemeire igaz, hogy bármely elemének reciproka is és az ellentettje is eleme a halmaznak.**

   a. **Lehet-e a halmaz elemeinek száma 13? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!**

   b. **Lehet-e a halmaz eleminek száma 14? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!**

(14 pont)

Megoldás:

A halmaz elemei között nem szerepelhet a 0, hiszen ennek a reciproka nem értelmezhető.

(2 pont)

a, Ha egy halmaznak az *a* szám eleme, akkor eleme lesz $\frac{1}{a};-a;-\frac{1}{a}$ is. Ez négy elemet jelent, kivéve azt az esetet, ha $a=1$ vagy ha $a=-1$. Ekkor csak ez két szám szerepel a halmaz elemei között.

(4 pont)

Viszont mindegyik esetben páros elemszámú halmazt kapunk, ami azt jelenti, hogy nem lehet a halmaz elemeinek száma 13.

(2 pont)

b, Az elemek száma 14 lehet. Azt megfigyelhetjük, hogy az 1 eleme lesz a halmaznak. Erre a halmazra végtelen sok eset közül egy példa: $A=\left\{1;-1;2;-2;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};3;-3;\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

(6 pont)

Összesen: 14 pont

2. **Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok. Legalább mekkora ennek a háromszögnek a kerülete?**

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje a háromszög oldalainak hosszát: $2n-2;2n;2n+2$, ahol $n\geq 2$ pozitív egész szám. Ennek a háromszögnek a leghosszabb oldala a háromszög-egyenlőtlenség miatt kisebb, mint a másik kettő összege.

(5 pont)

Eszerint:

$$2n-2+2n>2n+2$$

azaz

$$n>2$$

Ennek megfelelő legkisebb egész szám az $n=3$, így a megfelelő legkisebb kerületű háromszög $4+6+8=18$egység kerületű lesz.

(9 pont)

Összesen: 14 pont

3. Két város között vagy vonattal, vagy busszal lehet közlekedni. A vonat sebessége oda-vissza 90 km/h, míg a busz egyik irányban 80 km/h-val, visszafelé pedig 100 km/h-val képes haladni. Melyik közlekedési eszközzel járhatjuk be rövidebb idő alatt az oda-vissza utat?

(16 pont)

Megoldás:

A két város távolsága legyen *s*.

(2 pont)

A vonat menetidejére teljesül, hogy $t_1=\frac{2s}{90}=\frac{1}{45}s$.

(5 pont)

A busz esetében a menetidő: $t_2=\frac{s}{80}+\frac{s}{100}=\frac{9}{400}s$

(5 pont)

Mivel $\frac{1}{45}<\frac{9}{400}$, ezért a busz menetideje nagyobb lesz, mint a vonaté.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. 10 dobozban néhány cukorka van. Sorba rakva őket, mindegyikben 1-gyel több van, mint az előzőben. Át lehet-e pakolni a cukorkákat úgy, hogy mindegyik dobozban ugyanannyi legyen?

(16 pont)

Megoldás:

Jelöljük az egyes dobozokban levő cukorkák számát növekvő sorrendben a következő módon: $n-4;n-3;\ldots;n;n+1;n+2;\ldots;n+5$

(4 pont)

Ezek számának összege: $10n+5$ lesz, ami páratlan szám.

(5 pont)

Ha mindegyik dobozban ugyanannyi *k* db cukorka lenne, akkor ezek száma összesen $10k$ lenne, ami viszont páros szám.

(4 pont)

Így a megfelelő átpakolás semmiképpen nem érhető el.

(3 pont)

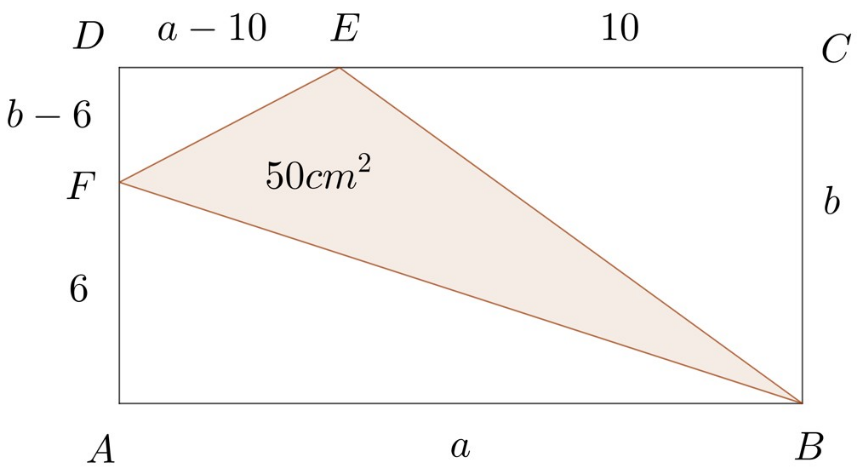
Összesen: 16 pont

5. **Az *ABCD* téglalap *CD* oldalán adott *E*, az *AD* oldalán pedig *F* pont úgy, hogy az $EC=10\,cm$, $AF=6\,cm$. Az *EFB* háromszög területe 50 cm^2. Mekkora az *ABCD* téglalap területe?**

(20 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Jelölje a téglalap oldalainak hosszát *a* és *b*, majd használjuk az ábra jelöléseit.



(3 pont)

Az ABCD téglalap területe: $T=ab$

(2 pont)

Másrészt a részek összegeként:

$$T=50+5b+3a+\frac{(a-10)(b-6)}{2}$$

(5 pont)

A kétféleképpen felírt területet egyenlővé téve, majd átrendezve adódik, hogy:

$$ab=160$$

(8 pont)

Ez éppen a téglalap területe, amely ezek szerint $160\,cm^2$ lesz.

(2 pont)

Összesen: 20 pont

6. **Adjuk meg 2023 legkisebb olyan többszörösét, amely 2024-re végződik!**

(20 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Ahhoz, hogy a 2023 többszöröse 4-re végződjön a szorzónak 8-ra kell végződnie.
Ennek megfelelően szorzást a szokásos módon felírva:

$\underline{2023\cdot\ldots}8$

16184

(6 pont)

A kapott eredmény alapján látható, hogy a 8-as alá 4-nek kerülnie, azaz a szorzó tízes helyiértékén ismét 8-nak kell állnia.

$\underline{2023 \cdot \ldots 88}$
16184
16184

(6 pont)

Hasonlóan folytatva juthatunk el a szorzó meghatározásában a 8088-hoz.

$\underline{2023} \cdot 8088$
16184
16184
0000
16184___
16362024

(6 pont)

Így a 2023 legkisebb többszöröse, amely 2024-re végződik a 16362024 lesz.

(2 pont)

Összesen: 20 pont