

(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Egy számhalmaz elemeire igaz, hogy bármely elemének reciproka is és az ellentettje is eleme a halmaznak.
 - a. Lehet-e a halmaz elemeinek száma 13? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!
 - b. Lehet-e a halmaz elemeinek száma 14? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!

(14 pont)

Megoldás:

A halmaz elemei között nem szerepelhet a 0, hiszen ennek a reciproka nem értelmezhető.

(2 pont)

a, Ha egy halmaznak az a szám eleme, akkor eleme lesz $\frac{1}{a}; -a; -\frac{1}{a}$ is. Ez négy elemet jelent, kivéve azt az esetet, ha $a=1$ vagy ha $a=-1$. Ekkor csak ez két szám szerepel a halmaz elemei között.

(4 pont)

Viszont mindegyik esetben páros elemszámú halmazt kapunk, ami azt jelenti, hogy nem lehet a halmaz elemeinek száma 13.

(2 pont)

b, Az elemek száma 14 lehet. Azt megfigyelhetjük, hogy az 1 eleme lesz a halmaznak. Erre a halmazra végtelen sok eset közül egy példa: $A = \left\{ 1; -1; 2; -2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 3; -3; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right\}$

(6 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok. Legalább mekkora ennek a háromszögnek a kerülete?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje a háromszög oldalainak hosszát: $2n-2; 2n; 2n+2$, ahol $n \geq 2$ pozitív egész szám.

Ennek a háromszögnek a leghosszabb oldala a háromszög-egyenlőtlenség miatt kisebb, mint a másik kettő összege.

(5 pont)

Eszerint:

$$2n-2+2n > 2n+2$$

azaz

$$n > 2$$

Ennek megfelelő legkisebb egész szám az $n=3$, így a megfelelő legkisebb kerületű háromszög $4+6+8=18$ egység kerületű lesz.

(9 pont)

Összesen: 14 pont

- 3. Két város között vagy vonattal, vagy busszal lehet közlekedni. A vonat sebessége oda-vissza 90 km/h, míg a busz egyik irányban 80 km/h-val, visszafelé pedig 100 km/h-val képes haladni. Melyik közlekedési eszközzel járhatjuk be rövidebb idő alatt az oda-vissza utat?**

(16 pont)

Megoldás:

A két város távolsága legyen s .

(2 pont)

A vonat menetidejére teljesül, hogy $t_1 = \frac{2s}{90} = \frac{1}{45}s$.

(5 pont)

A busz esetében a menetidő: $t_2 = \frac{s}{80} + \frac{s}{100} = \frac{9}{400}s$

(5 pont)

Mivel $\frac{1}{45} < \frac{9}{400}$, ezért a busz menetideje nagyobb lesz, mint a vonaté.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

- 4. Egy felmérésben két alkalommal lehetett részt venni (mindenki csak egy felmérésben vehetett részt). Az első alkalommal a résztvevők átlagpontszáma 35, a második alkalommal 50 pont volt, míg a teljes felmérésben részt vettek átlagpontszáma 40 pontnak bizonyult. Hányan vettek részt a felmérésben, ha az első alkalommal 25-tel többen voltak, mint a másodikban?**

(18 pont)

Megoldás:

Jelölje a második felmérésben résztvevők számát x .

A feltételek miatt így az első felmérésben $x+25$ személy vett részt.

(2 pont)

Ennek megfelelően a résztvevők összpontszámára felírható a következő egyenlet:

$$35(x+25) + 50x = 40(2x+25)$$

(7 pont)

Ezt megoldva: $x=25$ adódik.

Tehát felmérésben összesen $50+25=75$ -en vettek részt.

(7 pont)

A megoldás helyességét az ellenőrzés igazolja.

(2 pont)
Összesen: 18 pont

5. Mennyi az $x+y$ összeg minimuma, ha $x^2+4x+8=4-|y-1|$?

(18 pont)

Megoldás:

Rendezzük át az egyenletet a következő alakra:

$$x^2+4x+4+|y-1|=0$$

(5 pont)

Az első három tag teljes négyzet:

$$(x+2)^2+|y-1|=0$$

(5 pont)

Mivel $(x+2)^2 \geq 0$ és $|y-1| \geq 0$, ezért az egyenlet csak egy esetben teljesülhet, ha $x=-2$ és $y=1$.

(5 pont)

Ennek megfelelően az $x+y=-1$ lehet csak, ami egyben a minimuma is.

(3 pont)

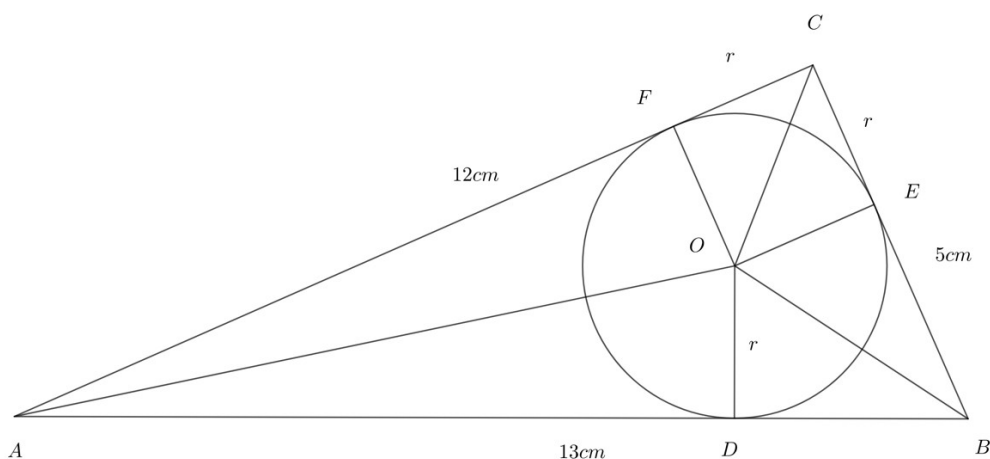
Összesen: 18 pont

6. Egy ABC háromszög oldalainak hossza 5 cm, 12 cm és 13 cm. Megrajzoltuk az O középpontú beírható körét. Határozzuk meg az AO , BO és CO szakaszok hosszát!

(20 pont)

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk a jelöléseit!



(4 pont)

A háromszög oldalainak hosszára $5^2+12^2=13^2$ ezért ABC derékszögű.

(4 pont)

A beírható kör sugara a terület alapján meghatározható:

$$\frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{r \cdot (5+12+13)}{2}$$

mely alapján $r = 2 \text{ cm}$ adódik.

(4 pont)

A körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét és a sugár hosszát felhasználva az AOD , BOD és COD derékszögű háromszögek alapján a keresett szakaszok hossza:

$$AO = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} \approx 10,2 \text{ cm}$$

$$BO = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61 \text{ cm}$$

$$CO = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2,83 \text{ cm}$$

(8 pont)

Összesen: 20 pont