

11. osztály, gimnázium

1. Oldja meg az $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$ egyenletet a valós számok körében. (12 pont)

2. Az x, y valós számokra $x + y > 0$ és $4x + y > 0$ teljesül. Megadható-e x és y úgy, hogy

a) $5x + 2y < 0$?

b) $2x + 5y < 0$?

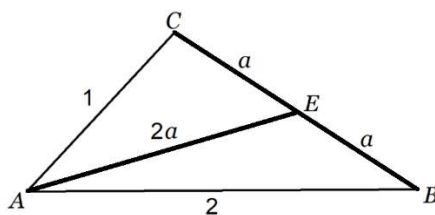
c) $8x + 5y < 0$?

d) $5x + 8y < 0$?

(12 pont)

3. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész számot nevezzünk *egoistának*, ha minden számjegye annyiszor szerepel a számban, amennyi maga a számjegy. Egoista szám például a 132332. Hány hatjegyű egoista szám van? (14 pont)

4. Az ABC háromszög két oldala $AB = 2$ és $AC = 1$, és a BC oldalhoz tartozó súlyvonal akkora, mint ez az oldal.



Mekkora ez az oldal?

(14 pont)

5. Az a_1, a_2, \dots sorozatot az $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1, n \geq 1$ rekurzió generálja. Mennyi a_{513} értéke? (14 pont)

6. Tekintsük az $ax^2 + bx + c, bx^2 + cx + a, cx^2 + ax + b$ polinomokat, ahol a, b, c pozitív valós számok. Vannak-e olyan a, b, c értékek, amikor a három polinomnak összesen

a) 1 zérushelye van?

b) 6 zérushelye van?

(14 pont)

7. A 100-nál kisebb pozitív p és q prímekre a $p + 6, p + 10, q + 10$ és $p + q + 1$ számok mindegyike prímszám. Melyek lehetnek ezek a p és q prímelek?

(20 pont)