(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Lehet-e a $10^{2021} - 7$ művelet eredménye prímszám?

(14 pont)

Megoldás:

Ha a kivonást elvégeznénk, akkor $10^{2021} - 7 = \underbrace{999\ldots9}_{2020\ db\ 9-es\ számjegy}3$ alakú számot kapnánk eredményül.

(4 pont)

Ebben a számjegyek összege osztható lesz 3-mal.

(3 pont)

Emiatt teljesül, hogy a $10^{2021} - 7$ is osztható 3-mal, és nagyobb mint 3.

(4 pont)

Így a művelet eredménye nem lehet prímszám.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy vonat két város közötti útját 80 km/h átlagsebességgel szokta megtenni. A vonat azonban egyik nap – pályakarbantartás miatt – az útja első háromnegyed részén csak kisebb, 50 km/h átlagsebességet ért el. Az út befejező egynegyed részén – hogy csökkentse a késést – gyorsított, így ezt a szakaszt 100 km/h átlagsebességgel tette meg. A célállomásra így is 12 perc késéssel érkezett. Hány km a távolság a két város között?

(14 pont)

Megoldás:

Legyen a két város közötti távolság *s*. Ekkor a feltételek alapján:

$$\frac{\frac{3s}{4}}{50} + \frac{\frac{s}{4}}{100} = \frac{s}{80} + \frac{1}{5}$$

(5 pont)

Ezt az egyenletet *s*-re megoldva: $s = 40$ adódik.

(5 pont)

A két város 40 km távolságra van egymástól. Ezt az ellenőrzés is igazolja.

(4 pont)

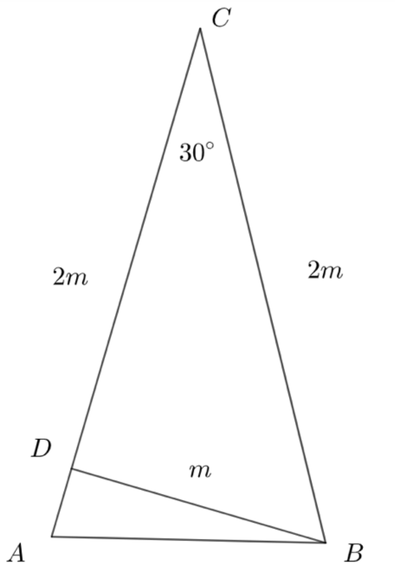
Összesen: 14 pont

3. Egy egyenlőszárú háromszög egyik szárának hossza kétszer annyi, mint az erre az oldalra merőleges magasság hossza. Mekkorák a háromszög szögei?

(16 pont)

Megoldás:

Készítsünk ábrát:



(2 pont)

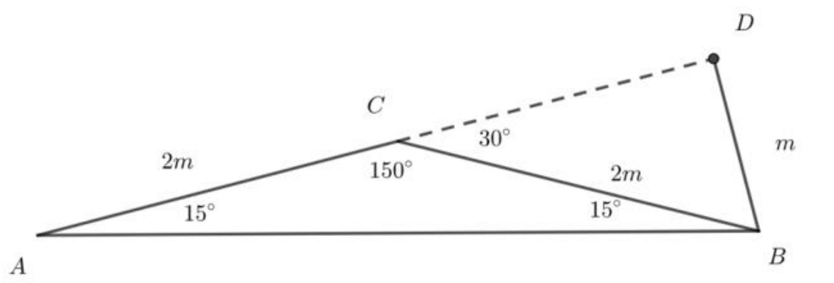
Vegyük észre, hogy a keletkező *BDC* derékszögű háromszögben a rövidebb befogó az átfogó fele, azaz, ha *CD*-re tükröznénk, akkor szabályos háromszöget kapnánk.

(4 pont)

Így *C*-nél levő szöge 30°-os, míg az alapon fekvő szögei 75°-sak lesznek.

(4 pont)

Abban az esetben, ha a szárak által bezárt szög tompaszög, akkor az alábbi ábrának megfelelően hasonlóan igazolható, hogy a háromszög alapon fekvő szögei 15°-sak, míg a szárak által bezárt szög 150°-os lesz.



(6 pont)

Összesen: 16 pont

4. Az $|x-a|<2021$ $|x-a|<2021$ egyenlőtlenségben az *a* egész számot jelöl. Adjuk meg ennek az *a* paraméternek az értékét úgy, hogy az egyenlőtlenségnek csak egyetlen pozitív egész megoldása legyen!

(18 pont)

<u>*Megoldás:*</u>
A feltételek alapján
$-2021 < x - a < 2021$

(4 pont)

Ezt x-re rendezve adódik, hogy:
$a - 2021 < x < a + 2021$

(4 pont)

Úgy kell megadnunk az *a* paraméter értékét, hogy ebbe az intervallumba pontosan egy pozitív egész szám essen.

(2 pont)

Ez $a + 2021 = 2$ $\Rightarrow$ $a = -2019$ esetén teljesül.

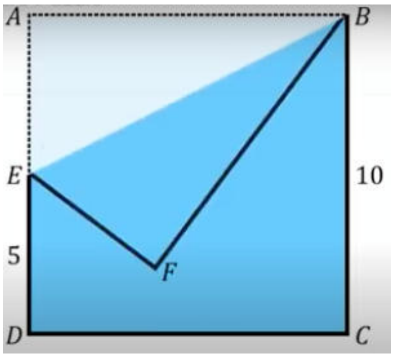
(4 pont)

Valóban, ekkor a $-4040 < x < 2$ feltétel miatt az $x = 1$ az egyetlen pozitív egész megoldás.

(4 pont)

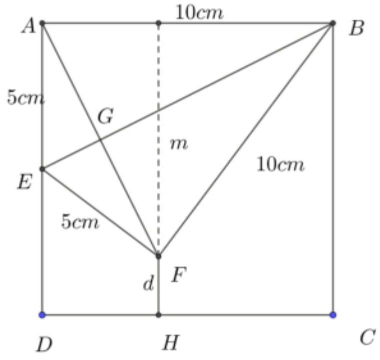
Összesen: 18 pont

5. Az ábrán látható 10 cm oldalú négyzetnek „behajtottuk” az egyik sarkát, ahol az *E* pont az *AD* oldal felezőpontja. Mekkora távolságra lesz az *F* pont a *DC* oldaltól?



(18 pont)

<u>*Megoldás:*</u>
Készítsük el az alábbi ábrát és használjuk a jelöléseit:



(2 pont)

A behajtás után az *ABFE* négyszög derékszögű deltoid lesz, melynek *BE* átlója:

$BE = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}\ cm$

(4 pont)

Ennek a deltoidnak a másik átlója a területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{5\sqrt{5} \cdot AF}{2} = 10 \cdot 5$$

Innét: $AF = 4 \cdot \sqrt{5}\ cm$ adódik, melynek fele: $GA = 2 \cdot \sqrt{5}\ cm$

(4 pont)

Ezek alapján:

$GE = \sqrt{5^2 - \left(2 \cdot \sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5}$, tehát $GB = 4 \cdot \sqrt{5}$

(4 pont)

Az ABF háromszög területét kétféleképpen felírva:

$\frac{10 \cdot m}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2}$ azaz, $m = 8\ cm$ adódik.

(2 pont)

Ebből az *F* pontnak *DC*-től vett távolságára 2 cm-t kapunk.

(2 pont)

Összesen: 18 pont

6. Egy 2021 x 2021 méretű táblázat minden mezőjébe az 1-től 2021-ig terjedő egész számok valamelyikét írtuk be úgy, hogy semelyik sorba nem kerültek egyenlő számok, és a táblázat szimmetrikus lett az egyik átlójára. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ebben az átlóban sem fordulnak elő egyenlő számok.

(20 pont)

Megoldás:

Mivel a táblázat szimmetrikus az átlóra, ezért, ha az átló által felosztott táblázatban valamely szám szerepel az átlón kívül valamelyik részben, akkor annak a számnak a másik részben is szerepelnie kell.

(4 pont)

Ebből következik, hogy páros darabszámú számnak kell lennie mindegyik számból az átlón kívül, hogy az átlóra szimmetrikusan helyezhessük el ezeket.

(4 pont)

A 2021x2021-es táblázatban mindegyik számból 2021 darab van.

(4 pont)

Mindegyik számból kell lennie az átlóban, mert ha valamelyik nem lenne, akkor ebből a számból páros darabszámú lenne a szimmetria miatt.
Az átlón kívül minden szám páros sokszor szerepel, ezért az átlóban páratlan sokszor kell szerepelnie minden számnak.

(4 pont)

Mivel az átlóban csak 2021 mező van, ezért minden számnak pontosan egyszer kell az átlóban szerepelnie.

(4 pont)

Összesen: 20 pont