(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Lehet-e a $10^{2021} - 7$ művelet eredménye prímszám?

(14 pont)

Megoldás:

Ha a kivonást elvégeznénk, akkor $10^{2021} - 7 = \underbrace{999\ldots9}_{2020\ db\ 9\text{–}es\ számjegy}3$ alakú számot kapnánk eredményül.

(4 pont)

Ebben a számjegyek összege osztható lesz 3-mal.

(3 pont)

Emiatt teljesül, hogy a $10^{2021} - 7$ is osztható 3-mal, és nagyobb mint 3.

(4 pont)

Így a művelet eredménye nem lehet prímszám.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy vonat két város közötti útját 80 km/h átlagsebességgel szokta megtenni. A vonat azonban egyik nap – pályakarbantartás miatt – az útja első háromnegyed részén csak kisebb, 50 km/h átlagsebességet ért el. Az út befejező egynegyed részén – hogy csökkentse a késést – gyorsított, így ezt a szakaszt 100 km/h átlagsebességgel tette meg. A célállomásra így is 12 perc késéssel érkezett. Hány km a távolság a két város között?

(14 pont)

Megoldás:

Legyen a két város közötti távolság *s*. Ekkor a feltételek alapján:

$$\frac{\frac{3s}{4}}{50} + \frac{\frac{s}{4}}{100} = \frac{s}{80} + \frac{1}{5}$$

(5 pont)

Ezt az egyenletet *s*-re megoldva: $s = 40$ adódik.

(5 pont)

A két város 40 km távolságra van egymástól. Ezt az ellenőrzés is igazolja.

(4 pont)

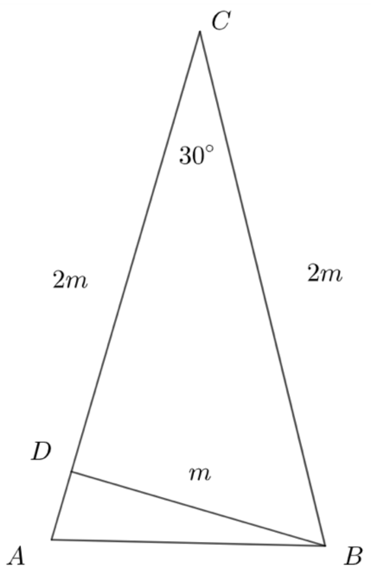
Összesen: 14 pont

3. Egy egyenlőszárú háromszög egyik szárának hossza kétszer annyi, mint az erre az oldalra merőleges magasság hossza. Mekkorák a háromszög szögei?

(16 pont)

Megoldás:

Készítsünk ábrát:



(2 pont)

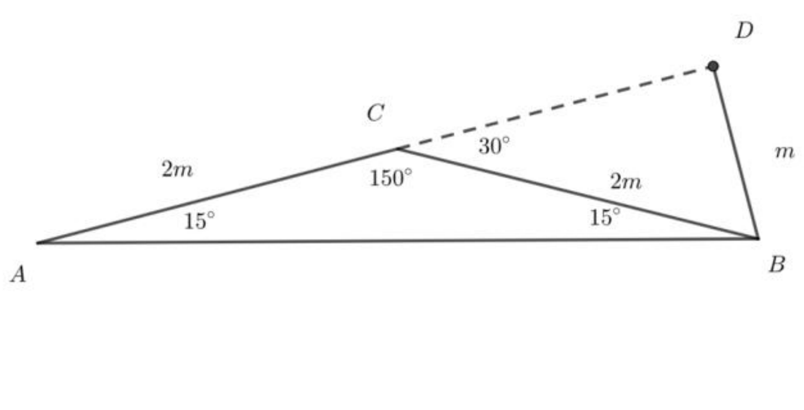
Vegyük észre, hogy a keletkező *BDC* derékszögű háromszögben a rövidebb befogó az átfogó fele, azaz, ha *CD*-re tükröznénk, akkor szabályos háromszöget kapnánk.

(4 pont)

Így *C*-nél levő szöge 30°-os, míg az alapon fekvő szögei 75°-sak lesznek.

(4 pont)

Abban az esetben, ha a szárak által bezárt szög tompaszög, akkor az alábbi ábrának megfelelően hasonlóan igazolható, hogy a háromszög alapon fekvő szögei 15°-sak, míg a szárak által bezárt szög 150°-os lesz.



(6 pont)

Összesen: 16 pont

4. Egy pozitív egész számot kiválónak nevezünk, ha legfeljebb háromjegyű és számjegyeinek összege 5. Hány kiváló szám van?

(18 pont)

Megoldás:

Először megkeressük, hogy milyen számhármasok állítják elő összegként az 5-öt, a sorrendjükre most még nem vagyunk tekintettel: $005, 014, 023, 113, 122.$

Összesen ez az öt eset lehetséges.

(5 pont)

Ezek lehetséges sorrendjei rendre: 3, 6, 6, 3, 3.

(5 pont)

Bármelyik sorrend ad egy kiváló számot, mert a 0-val kezdődőeket értelmezhetjük egy vagy kétjegyű számként. Pl. a $050 = 50$.

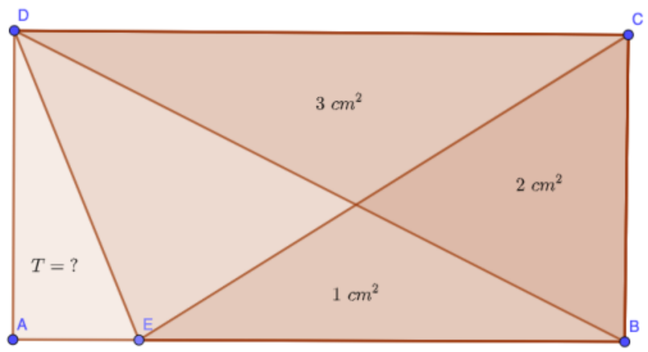
(4 pont)

Így a feltételeknek megfelelő kiváló számok száma $3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21$ lesz.

(2 pont)

Összesen 18 pont

5. Az ábrán látható *ABCD* téglalapban adottak a bejelölt háromszögek területei. Mekkora az *AED* háromszög területe?



(18 pont)

Megoldás:

Vegyük észre, hogy a $t_{DCB} = t_{DCE} = 5\ cm^2$, mert ugyanaz az alapjuk, és ugyanakkora a magasságuk.

(5 pont)

Ebből adódik, hogy a középütt jelöletlen háromszög területe szintén $2\ cm^2$ lesz.

(5 pont)

A téglalap területe $t_{ABCD} = 2 \cdot t_{BCD} = 10\ cm^2$.

(4 pont)

Így a keresett terület: $T_{AED} = 10 - (1 + 2 + 3 + 2) = 2\ cm^2$.

(4 pont)

Összesen 18 pont

6. Egy lapra egymás után felírtunk három 1-est. A negyedik számtól kezdve a további számokat úgy képeztük, hogy a kettővel és hárommal előtte álló számot összeadjuk. Így felírtuk összesen 1000 számot. Hány páros szám szerepel ezek között a számok között?

(20 pont)

Megoldás:

Írjunk fel néhány számot a szabályoknak megfelelően és jelöljük be azokat, amelyek párosak ezek közül.

1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16
-	-	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+

(6 pont)

Észrevehetjük, hogy a hetedik 4-es szám után a paritás ciklikusan ismétlődni fog, és mindegyikben három páros szám található.

(6 pont)

Mivel $1000 = 142 \cdot 7 + 6$, így 142 teljes ciklust írunk le és még 6 számot, melyben további 2 páros számot találhatunk.

(4 pont)

Így az 1000 szám között $142 \cdot 3 + 2 = 428$ páros szám lesz.

(4 pont)

Összesen 20 pont