Javítási útmutató
11. osztály, gimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Oldja meg az $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$ egyenletet a valós számok körében. ***(12 pont)***

Megoldás. Vezessünk be új ismeretlent: $a = x + \frac{1}{x}$. ***2 pont***

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, így $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$. ***2 pont***

Az egyenlet az $a^2 - 2 + a = 0$ alakot ölti. ***2 pont***

$a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1) = 0$, a megoldások $a = -2$ és $a = 1$. ***2 pont***

$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$, ezért az $x + \frac{1}{x} = 1$ egyenletnek nincs valós megoldása. ***2 pont***

Ha $x + \frac{1}{x} = -2$, akkor $x = -1$. ***2 pont***

2. Az x, y valós számokra $x + y > 0$ és $4x + y > 0$ teljesül. Megadható-e x és y úgy, hogy

a) $5x + 2y < 0$?

b) $2x + 5y < 0$?

c) $8x + 5y < 0$?

d) $5x + 8y < 0$?

(12 pont)

Megoldás. a) Nem lehet, mert $5x + 2y = (x + y) + (4x + y) > 0$, hiszen $x + y > 0$ és $4x + y > 0$.

b) Lehet, ha $x = 5$ és $y = -3$, akkor $x + y > 0$, $4x + y > 0$, és $2x + 5y < 0$.

c) Nem lehet, mert $8x + 5y = 4(x + y) + (4x + y) > 0$, hiszen $x + y > 0$ és $4x + y > 0$.

d) Lehet, ha $x = 4$ és $y = -3$, akkor $x + y > 0$, $4x + y > 0$, és $5x + 8y < 0$.

Mind a négy feladat ***3 pontos.*** A helyes válaszok ***1-1 pontot*** érnek.
A teljes pontszámot helyes indoklás esetén adjuk meg.

3. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész számot nevezzünk *egoistá*nak, ha minden számjegye annyiszor szerepel a számban, amennyi maga a számjegy. Egoista szám például a 132332. Hány hatjegyű egoista szám van? ***(14 pont)***

Megoldás. Egy hatjegyű egoista számban lévő különböző számjegyek összege 6. (Ha például kétféle számjegy van, a és b, akkor ezekből a, illetve b darab van, és ezek kiadják a hatjegyű szám összes számjegyét, tehát $a + b = 6$.) ***2 pont***

A számjegyek között nem lehet 0. A 6-ot kell különböző számok (számjegyek) összegeire bontani, hogy megtaláljuk az egoista számokat. ***2 pont***

$6 = 6$ esethez a 6 db 6-osból álló számok tartoznak. 1 ilyen szám van: 666666. ***1 pont***

$6 = 1 + 5$ eset az 1 db 1-est és 5 db 5-öst tartalmazó számokat jelenti. 6 ilyen szám van, hiszen az 1-es 6-féle helyiértéken állhat. ***1 pont***

$6 = 2 + 4$ eset a 2 db 2-est és 4 db 4-est tartalmazó számokat jelenti. $\binom{6}{2} = 15$ ilyen szám van. ***2 pont***

$6 = 1 + 2 + 3$ esetén a számjegyek $(1, 2, 2, 3, 3, 3)$. ***1 pont***

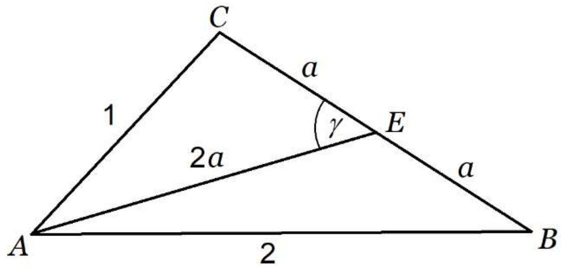
Ezekből $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$ szám képezhető. ***2 pont***

Több lehetőség nincs. ***1 pont***

A hatjegyű egoista számok száma: $1 + 6 + 15 + 60 = 82$. ***2 pont***

4. Az ABC háromszög két oldala $AB = 2$ és $AC = 1$, és a BC oldalhoz tartozó súlyvonal akkora, mint ez az oldal. Mekkora ez az oldal? ***(14 pont)***

1. megoldás. $EC = EB = a$ és $EA = 2a$. $AEC\angle = \gamma$ és $AEB\angle = 180° - \gamma$.



Írjuk fel a koszinusztételt az *AEC* és *AEB* háromszögben:

$$1^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos\gamma$$

$$2^2 = a^2 + (2a)^2 + 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos\gamma$$

7 pont

Adjuk össze a két egyenletet:

$$5 = 10a^2, \qquad a^2 = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad BC = 2a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

7 pont

2. megoldás. Tükrözzük az *A* csúcsot *E*-re. Kapunk egy paralelogrammát, melynek két szomszédos oldala 1 és 2, átlói $2a$ és $4a$. ***6 pont***

Használjuk a paralelogramma-tételt: $(2a)^2 + (4a)^2 = 2(1^2 + 2^2)$. ***4 pont***

Innen $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ***2 pont***

A háromszög harmadik oldala $BC = \sqrt{2}$. ***2 pont***

5. Az $a_1, a_2, \cdots$ sorozatot az $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1, n \geq 1$ rekurzió generálja. Mennyi a_{513} értéke? ***(14 pont)***

1. megoldás. Írjuk fel a sorozat első néhány tagját: $1, 1 + \sqrt{2}, 3, 1 + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{8}, 1 + \sqrt{10}, \ldots$ Adódik a sejtés, hogy $a_{n+1} = 1 + \sqrt{2n}$. ***2 pont***

Igazoljuk ezt teljes indukcióval.
Az indukciós feltevés az előbbi példák alapján teljesül.
Az indukciós lépésben azt látjuk be, hogy ha $a_n = 1 + \sqrt{2(n-1)}$, akkor $a_{n+1} = 1 + \sqrt{2n}$.
Tudjuk, hogy $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1$.
A feltevés alapján $a_{n+1} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{2(n-1)}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \sqrt{2(n-1)}\right) + 3} + 1$.

Számoljunk!
A négyzetgyök alatti kifejezés: $\left(1 + \sqrt{2(n-1)}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \sqrt{2(n-1)}\right) + 3 =$

$$= \left(2n - 1 + 2\sqrt{2(n-1)}\right) - \left(2 + 2\sqrt{2(n-1)}\right) + 3 = 2n$$

Tehát valóban: $a_{n+1} = \sqrt{2n} + 1$. ***10 pont***

Ezért $a_{513} = \sqrt{2 \cdot 512} + 1 = \sqrt{1024} + 1 = 32 + 1 = 33$. ***2 pont***

2. megoldás. A rekurzió alapján $a_{n+1} - 1 = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} = \sqrt{(a_n - 1)^2 + 2}$.
Tehát $(a_{n+1} - 1)^2 = (a_n - 1)^2 + 2$. ***6 pont***

Legyen $b_n = (a_n - 1)^2$. Ekkor $b_{n+1} = b_n + 2$, és $b_1 = 0$, minden *n* pozitív egészre. ***2 pont***
Azaz a b_n sorozat elemei 0, 2, 4, 6, 8, …
Tehát $b_n = 2(n-1)$.
Ezért $b_{513} = 1024$. ***2 pont***
$b_{513} = (a_{513} - 1)^2$, azaz $1024 = (a_{513} - 1)^2$. ***2 pont***

Így $a_{513} - 1 = 32$, és $a_{513} = 33$. ***2 pont***

6. Tekintsük az $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$, $cx^2 + ax + b$ polinomokat, ahol *a, b, c* pozitív valós számok. Vannak-e olyan *a, b, c* értékek, amikor a három polinomnak összesen

a) 1 zérushelye van?

b) 6 zérushelye van?

(14 pont)

Megoldás. ***a)*** Igen, van. Ha összesen egy zérushely van, akkor az egyik polinom teljes négyzet, a másik két polinom esetén a diszkrimináns negatív.
Ha $(a, b, c) = (1, 2, 1)$, akkor az $x^2 + 2x + 1$ polinomnak a -1 az egyetlen zérushelye, és a $2x^2 + x + 1$, ill. $x^2 + x + 2$ polinomoknak nincs zérushelye. Ekkor összesen 1 zérushely van.

b) Nincsenek ilyen számok.
Ha a polinomnak van zérushelye, akkor a diszkriminánsa nemnegatív.
Lehet-e mindhárom polinomnak zérushelye? Ekkor $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$, $a^2 \geq 4bc$.
Ezek szorzata $(abc)^2 \geq 64(abc)^2$, és ez nem teljesülhet. Tehát a három egyenlőtlenségből legfeljebb kettő teljesül, ezért nem lehet 6 zérushely, legfeljebb 4 zérushelye lehet a polinomoknak.

Mind a két feladat ***7 pontos.*** A helyes válaszok ***1-1 pontot*** érnek.
A teljes pontszámot helyes levezetés, indoklás esetén adjuk meg.

7. A 100-nál kisebb pozitív p és q prímekre a $p+6, p+10, q+10$ és $p+q+1$ számok mindegyike prímszám. Melyek lehetnek ezek a p és q prímek?

(20 pont)

Megoldás. $p \neq 2, p \neq 3$, mivel $p+6$ prímszám.
Ezért $p = 6k+1$ vagy $p = 6k+5$ alakú.
Azonban $p+10$ prímszám, így $p = 6k+5$ nem lehet, hiszen ekkor $p+10 = 6k+15$ lenne, ami 3-mal osztható összetett szám.
Tehát a p prím $6k+1$ alakú. Kisebb 100-nál, ezért p lehetséges értékei 7, 13, 37, 97. Ezekhez keressünk alkalmas q prímeket.

A p prím lehetséges értékeinek megtalálása ***2-2 pontot*** ér, ez összesen ***8 pont*** lehet.
Annak tisztázása, hogy ez a prím nem lehet 2, nem lehet 3, nem lehet $6k+5$ alakú,
ez is ***1-1 pont***, ami összesen ***3 pont*** lehet.

A q prím nem lehet $6n+5$ alakú, mivel ebben az esetben $q+10 = 6n+15$ nem lesz prím.
Ha a q prím $6n+1$ alakú, akkor a $p+q+1 = (6k+1)+(6n+1)+1 = 6A+3$ nem lesz prímszám.
Arra jutottunk, hogy a q prím nem lehet $6n+5$ alakú, és nem lehet $6n+1$ alakú. Emiatt q értéke csak 2 vagy 3 lehet. $q = 2$ nem lehet, mert ekkor $q+10 = 12$ összetett szám.
Ezért $q = 3$, más lehetőség nincs.

A q prím nem lehet 2, nem lehet $6k+5$ alakú, nem lehet $6k+1$ alakú, ez ***1-1 pont***, ami összesen ***3 pont*** lehet.
A q prím lehet 3, ez ***2 pont***.

A (p, q) értékekre kapott lehetőségeket ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a kiszabott feltételek.
A $(7,3), (13,3), (37,3), (97,3)$ számpárok mindegyike olyan, melyekre a $p+6, p+10$, $q+10$ és $p+q+1$ számok mindegyike prímszám.
Tehát ez a négy számpár jelenti a megoldást.

A 4 megoldás – $(7,3), (13,3), (37,3), (97,3)$ – megtalálása ***1-1 pontot ér***, ez összesen ***4 pont*** lehet.