Javítási útmutató
11. osztály, szakgimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Melyek azok az x valós számok, amelyekre $x^2 - 8 \leq 2x$ és $x^2 - 2x \geq 8$ mindegyike teljesül? ***(8 pont)***

Megoldás. Rendezzük mindkét egyenlőtlenséget 0-ra:

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

2 pont

A két egyenlőtlenségből $x^2 - 2x - 8 = 0$ adódik. ***3 pont***

$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4) = 0$, tehát két olyan szám van, amelyre mindkét egyenlőtlenség teljesül. Ezek -2 és 4. ***3 pont***

2. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész számot nevezzünk *egoistá*nak, ha minden számjegye annyiszor szerepel a számban, amennyi maga a számjegy. Egoista szám például a 132332. Hány hatjegyű egoista szám van? ***(14 pont)***

Megoldás. Egy hatjegyű egoista számban lévő különböző számjegyek összege 6. (Ha például kétféle számjegy van, a és b, akkor ezekből a, illetve b darab van, és ezek kiadják a hatjegyű szám összes számjegyét, tehát $a + b = 6$.) ***2 pont***

A számjegyek között nem lehet 0. A 6-ot kell különböző számok (számjegyek) összegeire bontani, hogy megtaláljuk az egoista számokat. ***2 pont***

$6 = 6$ esethez a 6 db 6-osból álló számok tartoznak. 1 ilyen szám van: 666666. ***1 pont***

$6 = 1 + 5$ eset az 1 db 1-est és 5 db 5-öst tartalmazó számokat jelenti. 6 ilyen szám van, hiszen az 1-es 6-féle helyiértéken állhat. ***1 pont***

$6 = 2 + 4$ eset a 2 db 2-est és 4 db 4-est tartalmazó számokat jelenti. $\binom{6}{2} = 15$ ilyen szám van. ***2 pont***

$6 = 1 + 2 + 3$ esetén a számjegyek $(1, 2, 2, 3, 3, 3)$. ***1 pont***

Ezekből $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$ szám képezhető. ***2 pont***

Több lehetőség nincs.

A hatjegyű egoista számok száma: $1 + 6 + 15 + 60 = 82$. ***3 pont***

3. Az *x, y* valós számokra $x + y > 0$ és $4x + y > 0$ teljesül. Megadható-e *x* és *y* úgy, hogy
a) $5x + 2y < 0$?
b) $2x + 5y < 0$?
c) $8x + 5y < 0$?
d) $5x + 8y < 0$? ***(12 pont)***

Megoldás. a) Nem lehet, mert $5x + 2y = (x + y) + (4x + y) > 0$, hiszen $x + y > 0$ és $4x + y > 0$.
b) Lehet, ha $x = 5$ és $y = -3$, akkor $x + y > 0$, $4x + y > 0$, és $2x + 5y < 0$.
c) Nem lehet, mert $8x + 5y = 4(x + y) + (4x + y) > 0$, hiszen $x + y > 0$ és $4x + y > 0$.
d) Lehet, ha $x = 4$ és $y = -3$, akkor $x + y > 0$, $4x + y > 0$, és $5x + 8y < 0$.
Mind a négy feladat ***3 pontos.*** A helyes válaszok ***1-1 pontot*** érnek.
A teljes pontszámot helyes indoklás esetén adjuk meg.

4. Oldja meg a $\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}$ egyenletet a valós számok körében. ***(12 pont)***

Megoldás. Az egyenlet megoldására $x \geq 4$ teljesül a második négyzetgyök értelmezhetősége miatt.
Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$$(3x + 4) + (x - 4) + 2\sqrt{(3x + 4)(x - 4)} = 4x$$

és innen

$$2\sqrt{(3x + 4)(x - 4)} = 0$$

azaz

$$(3x + 4)(x - 4) = 0$$

adódik. ***6 pont***
Ennek megoldásai: $x_1 = -\frac{4}{3}$ és $x_2 = 4$. ***2 pont***
Az $x_1 = -\frac{4}{3}$ hamis gyök az $x \geq 4$ feltétel miatt. ***2 pont***
$x = 4$ az egyedüli megoldása lehet az egyenletnek.
$\sqrt{3 \cdot 4 + 4} + \sqrt{4 - 4} = 2\sqrt{4}$, így az egyetlen megoldás $x = 4$. ***2 pont***

5. Egy háromszög kerülete 60 egység. Ha a legkisebb oldal négyszereséhez hozzáadjuk a legnagyobb oldalt, 71 egység az eredmény. Mekkorák a háromszög oldalai, ha az egyik oldala kétszerese egy másik oldalának? ***(16 pont)***

Megoldás. A háromszög oldalai $a \leq b \leq c$.

$$\begin{cases} a + b + c = 60 \\ 4a + c = 71 \end{cases}$$

2 pont

Egyik oldala kétszerese egy másiknak.
Három eset lehetséges: vagy $b = 2a$, vagy $c = 2a$, vagy $c = 2b$. ***3 pont***
Ha $b = 2a$, akkor az egyenletrendszerünk:

$$\begin{cases} 3a + c = 60 \\ 4a + c = 71 \end{cases}$$

2 pont

Ekkor $a = 11,\ b = 22,\ c = 27$. ***1 pont***
Ezek lehetnek egy háromszög oldalai, ez megoldás. ***1 pont***

Ha $c = 2a$, akkor az egyenletrendszerünk: ***2 pont***

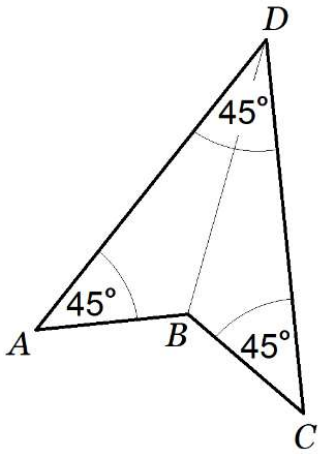
$$\begin{cases} 3a + b = 60 \\ 6a = 71 \end{cases}$$

Ekkor $a = \frac{71}{6}, b = \frac{147}{6}, c = \frac{142}{6}$. ***1 pont***

Ez nem megoldás, mert nem teljesül az elvárt $b \leq c$ egyenlőtlenség. ***1 pont***

Ha $c = 2b$, akkor tekintettel az $a \leq b \leq c$ egyenlőtlenségekre $a + b \leq 2b = c$, így nem áll fenn az $a + b > c$ háromszög-egyenlőtlenség, tehát ebben az esetben nincs megoldás. ***3 pont***

6. Az *ABCD* négyszögben az *A, C, D* csúcsoknál 45°-os szögek vannak.



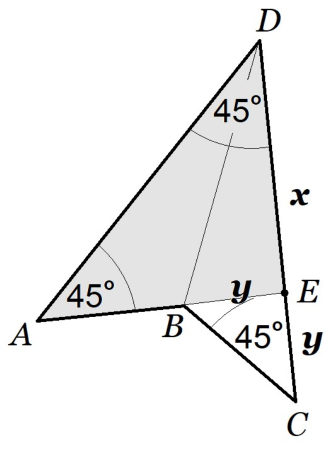
Mekkora a négyszög területe, ha $BD = 10$ egység? ***(18 pont)***

Megoldás. Hosszabbítsuk meg az *AB* oldalt, ez a *CD* oldalt az *E* pontban metszi. ***4 pont***

Az *AED* háromszögben két szög 45°-os, ezért a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. ***2 pont***

A *CEB* derékszögű háromszög is egyenlő szárú, hiszen egyik hegyesszöge 45°-os. ***2 pont***

Az *ABCD* négyszög területe ennek a két derékszögű háromszög területének összege. ***2 pont***



$ED = EA = x, T_{AED} = \frac{1}{2}x^2$. ***2 pont***

$EC = EB = y, T_{BEC} = \frac{1}{2}y^2$. ***2 pont***

$T_{ABCD} = T_{AED} + T_{BEC} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}BD^2$. ***2 pont***

Ezért $T_{ABCD} = \frac{1}{2}BD^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50$. ***2 pont***

7. Az *a, b, c, d* számok közül az első három számtani, az utolsó három mértani sorozatot alkot. Melyek ezek a számok, ha $a + d = 16$ és $b + c = 8$? ***(20 pont)***

(Az a_n sorozat mértani sorozat, ha valamely $q \neq 0$ számra $a_{n+1} = a_n \cdot q$, $n = 1, 2, 3, \cdots$)

Megoldás. *a, b, c* számtani sorozatot alkot, azaz $2b = a + c$. ***2 pont***

Mivel $c = 8 - b$, így $2b = a + 8 - b$, tehát $a = 3b - 8$. ***2 pont***

b, c, d mértani sorozatot alkot, így $c^2 = bd$. ***2 pont***

$a + d = 16$ miatt $c^2 = b(16 - a)$. ***2 pont***

$a = 3b - 8$, ezért $c^2 = b(24 - 3b)$. ***2 pont***

$c = 8 - b$, tehát $c^2 = (8 - b)^2$. ***2 pont***

Ezekből $(8 - b)^2 = b(24 - 3b) = 3b(8 - b)$. ***2 pont***

$(8 - b)^2 - 3b(8 - b) = 0$, azaz $(8 - b)(8 - 4b) = 0$, így $b = 2$ vagy $b = 8$. ***2 pont***

Ha $b = 2$, akkor az *a, b, c, d* számok: $-2, 2, 6, 18$. ***2 pont***

Ha $b = 8$, akkor az *a, b, c, d* számok: $16, 8, 0, 0$. Ez nem megoldás, mert egy mértani sorozat kvóciense nem lehet 0. ***2 pont***