Javítási útmutató
12. osztály, gimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Ha az *a, b, c* valós számokra $a < b < c$ teljesül, akkor az alábbiak közül melyik lehet igaz? (Ha igaz lehet, akkor adjon egy megfelelő példát. Ha nem teljesülhet, akkor igazolja azt.)

(1) $a^2 < b^2 < c^2$ (2) $b^2 < c^2 < a^2$ (3) $b^2 < a^2 < c^2$
(4) $c^2 < b^2 < a^2$ (5) $c^2 < a^2 < b^2$ ***(12 pont)***

Megoldás: (1) igaz, ha például $a = 1, b = 2, c = 3$.

(2) igaz, ha például $a = -3, b = -1, c = 2$.

(3) igaz, ha például $a = -2, b = 1, c = 3$.

(4) igaz, ha például $a = -3, b = -2, c = -1$.

Ha $c^2 < a^2 < b^2$, akkor $|c| < |a| < |b|$.
Mivel $a < c$ és $|c| < |a|$, így $a < 0 < c$.
Mivel $b < c$ és $|c| < |b|$, így $b < 0 < c$.
Ezekből $a < 0$, $b < 0$, és $a^2 < b^2$, így $b < a < 0$, ami ellentmond az $a < b < c$ feltételnek. Az (5) állítás sosem teljesül.

Az első négy kérdés tisztázása ***2-2 pont.*** Az ötödik kérdés helyes indoklása ***4 pont.***

2. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész számot nevezzünk *egoistá*nak, ha minden számjegye annyiszor szerepel a számban, amennyi maga a számjegy. Egoista szám például a 1424442. Hány hétjegyű egoista szám van? ***(15 pont)***

Megoldás. Egy hétjegyű egoista számban lévő különböző számjegyek összege 7. (Ha például kétféle számjegy van, *a* és *b*, akkor ezekből *a*, illetve *b* darab van, és ezek kiadják a hétjegyű szám összes számjegyét, tehát $a + b = 7$.) ***2 pont***

A számjegyek között nem lehet 0. A 7-et kell különböző számok (számjegyek) összegeire bontani, hogy megtaláljuk az egoista számokat. ***2 pont***

$7 = 7$ esethez a 7 db 7-esből álló számok tartoznak. 1 ilyen szám van. ***1 pont***

$7 = 1 + 6$ eset az 1 db 1-est és 6 db 6-ost tartalmazó számokat jelenti. 7 ilyen szám van, hiszen az 1-es 7-féle helyiértéken állhat. ***1 pont***

$7 = 2 + 5$ eset a 2 db 2-est és 5 db 5-öst tartalmazó számokat jelenti. $\binom{7}{2} = 21$ ilyen szám van. ***2 pont***

$7 = 3 + 4$ eset a 3 db 3-ast és 4 db 4-est tartalmazó számokat jelenti. $\binom{7}{3} = 35$ ilyen szám van. ***2 pont***

$7 = 1 + 2 + 4$ esetén a számjegyek $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4)$. Ezekből $\frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 4!} = 105$ szám képezhető.

2 pont

A hétjegyű egoista számok száma: $1 + 7 + 21 + 35 + 105 = 169$. ***3 pont***

3. Az $x^2 + 4x + a = 0$ egyenlet gyökei x_1, x_2, az $y^2 + 8y + b = 0$ egyenlet gyökei y_1, y_2. Tudjuk, hogy y_1, x_1, y_2, x_2 ebben a sorrendben egy számtani sorozat négy egymást követő tagja. Határozza meg az *a* és *b* számokat! ***(13 pont)***

Megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ y_1 + y_2 = -8 \end{cases}$$

2 pont

A számtani sorozat differenciája *d*.
Ekkor $x_1 = y_1 + d$, $y_2 = y_1 + 2d$, $x_2 = y_1 + 3d$. ***2 pont***

Így az előbbi egyenletrendszer a következő alakot ölti:

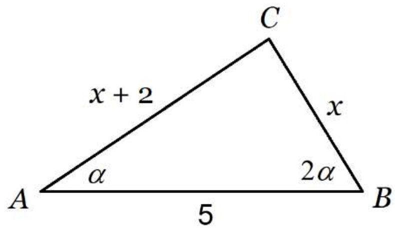
$$\begin{cases} y_1 + 2d = -2 \\ y_1 + d = -4 \end{cases}$$

1 pont

$d = 2$,
$y_1 = -6, y_2 = -2, x_1 = -4, x_2 = 0$. ***4 pont***
A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján: $a = x_1 \cdot x_2 = 0$ és $b = y_1 \cdot y_2 = 12$.

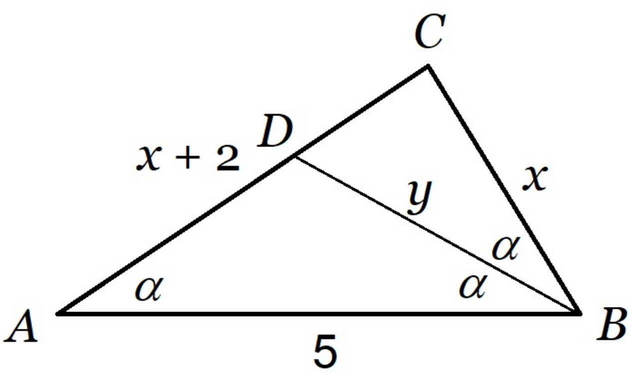
4 pont

4. Az *ABC* háromszögben $AB = 5$, $AC = BC + 2$, és $ABC\measuredangle = 2 \cdot CAB\measuredangle$.



Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai? ***(13 pont)***

1. megoldás. Rajzoljuk meg a *B* csúcsból induló szögfelezőt.
A szögfelező a szemközti oldalt a *D* pontban metszi. $BD = y, BC = x, CAB\measuredangle = \alpha$.



A BAC és a DBC háromszögek hasonlók, hiszen megegyeznek a C csúcsnál lévő szögben, és mindkét háromszögnek van α nagyságú szöge. ***2 pont***

Ezért $\frac{x}{y} = \frac{x+2}{5}$. ***2 pont***

A szögfelezőtétel miatt $\frac{AD}{DC} = \frac{5}{x}$. ***2 pont***

Az ABD háromszög egyenlő szárú, ezért $AD = DB = y$, és így $CD = x + 2 - y$.

Így az előző aránypár: $\frac{y}{x+2-y} = \frac{5}{x}$. ***2 pont***

Az eddigiekből $\frac{y}{5} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{x}{x+2}$.

$xy + 2y = 5x$ és $xy = 5x + 10 - 5y$.

Ezek különbsége $2y = 5y - 10$.

$y = \frac{10}{3}, x = 4$. ***3 pont***

A háromszög másik két oldalának hossza: $BC = 4, AC = 6$. ***2 pont***

2. megoldás. Használjuk fel a szinusztételt ($a = 2R \cdot \sin\alpha$, ahol a háromszög a oldalával szemközti szög α, és R a háromszög köré írt kör sugara).

$BC = x = 2R \cdot \sin\alpha$,

$AC = x + 2 = 2R \cdot \sin 2\alpha$,

$AB = 5 = 2R \cdot \sin(180° - 3\alpha)$, mivel a háromszög C csúcsnál lévő szöge: $180° - 3\alpha$.

Tehát $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(180°-3\alpha)}$. ***3 pont***

Az $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha}$ egyenlőségből $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \frac{2}{x}$, azaz $2\cos\alpha = 1 + \frac{2}{x}$ adódik. ***1 pont***

$\sin(180° - 3\alpha) = \sin 3\alpha$, így $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin 3\alpha}$, azaz $x = \frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$. ***1 pont***

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ miatt $x = \frac{5}{3-4\sin^2\alpha}$. ***1 pont***

Ezt a korábbi $2\cos\alpha = 1 + \frac{2}{x}$ egyenletbe helyettesítve $2\cos\alpha = 1 + \frac{6-8\,\mathrm{si}\ {}^{2}\alpha}{5}$ adódik, azaz $8\cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 3 = 0$. ***2 pont***

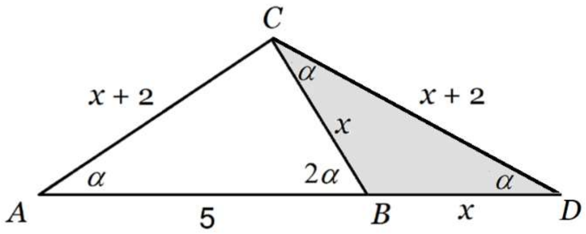
Az egyenlet gyökei $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ és $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. ***1 pont***

Ha $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, akkor $x = 4$. ***1 pont***

Ha $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, akkor $2\cos\alpha = 1 + \frac{2}{x}$ miatt $1 = 1 + \frac{2}{x}$, és ennek nincs megoldása. ***1 pont***

Így $BC = 4, AC = 6$. ***2 pont***

3. megoldás. Az AB oldal egyenesén az ábra szerint vegyük fel a D pontot úgy, hogy $BD = BC$ legyen. ***2 pont***



A BCD háromszög egyenlő szárú, az alapon fekvő szögek összege $CBA\measuredangle = 2\alpha$.
Ezért $BCD\measuredangle = BDC\measuredangle = \alpha$. ***2 pont***

Az ADC háromszögben $CAD\measuredangle = CDA\measuredangle = \alpha$, ezért a háromszög egyenlő szárú.
Így $AC = DC = x + 2$. ***2 pont***

Az ADC és a DCB egyenlő szárú háromszögekben az alapon fekvő szögek ugyanakkorák, ezért. a két háromszög hasonló. ***2 pont***

$\frac{AC}{AD} = \frac{DB}{DC}$, azaz $\frac{x+2}{5+x} = \frac{x}{x+2}$. ***2 pont***

$4x + 4 = 5x$, tehát $x = 4$. ***1 pont***

A háromszög másik két oldalának hossza: $BC = 4, AC = 6$. ***2 pont***

5. Melyik prímet jelölheti p, ha $16p + 1$ értéke köbszám? ***(11 pont)***

Megoldás. Ha $16p + 1 = n^3$, akkor $16p = n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$. ***3 pont***

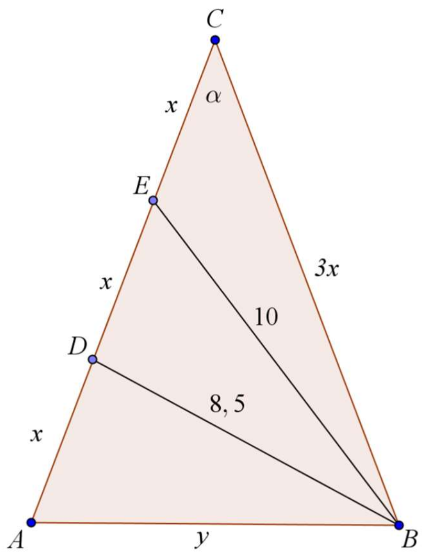
Mivel $n^2 + n + 1$ értéke páratlan és 1-nél nagyobb, ezért $n^2 + n + 1 = p$, és így $n - 1 = 16$.
3 pont

Tehát $n = 17$. Ez az egyetlen megoldás akkor, ha $p = 17^2 + 17 + 1 = 307$ prímszám. ***2 pont***

A 307 prím, így ez az egyetlen olyan p prím, amelyre $16p + 1$ értéke köbszám. ***3 pont***
Esetünkben $16 \cdot 307 + 1 = 4913 = 17^3$.

6. Az ABC háromszögben $AC = BC$. Az AC oldalon felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $AD = DE = EC$ legyen. Számítsa ki a háromszög területét, ha $BD = 8{,}5$ és $BE = 10$ egység.
(16 pont)

Megoldás. $t_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{9x^2 \cdot \sin\alpha}{2}$, tehát x^2 és $\sin\alpha$ értékét kell meghatározni.



Jó ábra ***2 pont.***

A koszinusztétel a *BCE* háromszögben: $100 = x^2 + 9x^2 - 6x^2 \cdot \cos\alpha$, így

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + 9x^2 - 100}{6x^2}$$

2 pont

A koszinusztétel a *BCD* háromszögben: $72{,}25 = 4x^2 + 9x^2 - 12x^2 \cdot \cos\alpha$, így

$$\cos\alpha = \frac{4x^2 + 9x^2 - 72{,}25}{12x^2}$$

2 pont

Ezekből $\frac{x^2+9x^2-100}{6x^2} = \frac{4x^2+9x^2-72{,}25}{12x^2}$ adódik. ***2 pont***

Az egyenlet megoldása $x^2 = 18{,}25$. ***2 pont***

Számolhatjuk $\cos\alpha$-t: $\cos\alpha = \frac{55}{73}$. ***2 pont***

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ és $\sin\alpha > 0$, ezért $\sin\alpha = \frac{48}{73}$. ***2 pont***

A háromszög területe $t_{ABC} = \frac{9x^2 \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{9 \cdot 18{,}25}{2} \cdot \frac{48}{73} = 54$ területegység. ***2 pont***

2. megoldás. Használjuk a paralelogramma-tételt, pontosabban az abból adódó összefüggést a háromszög súlyvonalára.

Ha egy paralelogramma oldalai *a* és *b*, átlói *e* és *f*, akkor $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Ha az *a, b, c* oldalú háromszög *c* oldalához tartozó súlyvonal *s*, akkor $s^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$.

Az *ABE* háromszögben: $8{,}5^2 = \frac{2y^2+200-\quad^2}{4}$. ***4 pont***

A *DBC* háromszögben: $10^2 = \frac{2 \cdot 8{,}5^2+2 \cdot 9x^2-4x^2}{4}$. ***4 pont***

Az utóbbi egyenletből $x^2 = 18{,}25$. ***2 pont***

Számolhatjuk *y* értékét: $y = 9$. ***2 pont***

Az *ABC* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága: $m = \sqrt{9x^2 - \frac{y^2}{4}} = 12$. ***2 pont***

Az *ABC* háromszög területe: $t = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. ***2 pont***

7. a) A sík mely $(x; y)$ pontjaira teljesül az egyenlőtlenség?

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1$$

b) Mennyi $x + y$ legnagyobb értéke, ha teljesül rájuk az egyenlőtlenség?

(20 pont)

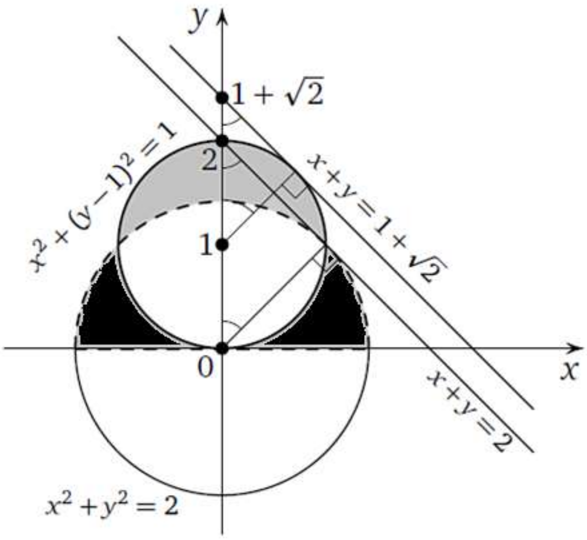
Megoldás. a) Ha a logaritmus alapja 1-nél nagyobb, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő. ***1 pont***

Ha $\frac{x^2+y^2}{2} > 1$, akkor $y \geq \frac{x^2+y^2}{2}$. Azaz $1 < \frac{x^2+y^2}{2} \leq y$, vagyis $2 < x^2 + y^2 \leq 2y$. ***2 pont***

Az $(x; y)$ pontok $x^2 + y^2 > 2$ miatt az origó középpontú $r = \sqrt{2}$ sugarú $x^2 + y^2 = 2$ körön kívül vannak. ***2 pont***

$x^2 + y^2 \leq 2y$, azaz $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ miatt az $(x; y)$ pontok a $(0; 1)$ középpontú $r = 1$ sugarú $x^2 + (y-1)^2 = 1$ körön, illetve annak belsejében vannak. ***2 pont***

Ezeket a feltételeket az ábrán szürkére festett $(x; y)$ pontok teljesítik. ***1 pont***



Ha a logaritmus alapja 0 és 1 közötti szám, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő. ***1 pont***

Ha $0 < \frac{x^2+y^2}{2} < 1$, akkor $y \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Mivel $y > 0$, így most $0 < y \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ teljesül. ***2 pont***

$x^2 + y^2 \geq 2y$, azaz $x^2 + (y-1)^2 \geq 1$ miatt az $(x; y)$ pontok a $(0; 1)$ középpontú $r = 1$ sugarú $x^2 + (y-1)^2 = 1$ körön, illetve azon kívül vannak. ***2 pont***

$y > 0$ miatt az $(x; y)$ pontok az x-tengely felett vannak. ***1 pont***

Ezeket a feltételeket az ábrán feketére festett $(x; y)$ pontok teljesítik. ***1 pont***

b) Nézzük azokat az $x + y = a$ egyeneseket, melyek belemetszenek az ábrán befestett területbe. Ezen $y = a - x$ egyenesek közül a legnagyobb a számhoz tartozó egyenes érinti az $x^2 + (y-1)^2 = 1$ kört. ***2 pont***

Ez az érintő az $x + y = a$ egyenes, ahol $a = 1 + \sqrt{2}$. ***2 pont***

$x + y$ keresett legnagyobb értéke $1 + \sqrt{2}$. ***1 pont***