Javítási útmutató
12. osztály, szakgimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Ha az *a, b, c* valós számokra $a < b < c$ teljesül, akkor az alábbiak közül melyik lehet igaz? (Ha igaz lehet, akkor adjon egy megfelelő példát. Ha nem teljesülhet, akkor igazolja azt.)

(1) $a^2 < b^2 < c^2$ (2) $b^2 < c^2 < a^2$ (3) $b^2 < a^2 < c^2$
(4) $c^2 < b^2 < a^2$ (5) $c^2 < a^2 < b^2$ ***(12 pont)***

Megoldás: (1) igaz, ha például $a = 1, b = 2, c = 3$.

(2) igaz, ha például $a = -3, b = -1, c = 2$.

(3) igaz, ha például $a = -2, b = 1, c = 3$.

(4) igaz, ha például $a = -3, b = -2, c = -1$.

Ha $c^2 < a^2 < b^2$, akkor $|c| < |a| < |b|$.
Mivel $a < c$ és $|c| < |a|$, így $a < 0 < c$.
Mivel $b < c$ és $|c| < |b|$, így $b < 0 < c$.
Ezekből $a < 0$, $b < 0$, és $a^2 < b^2$, így $b < a < 0$, ami ellentmond az $a < b < c$ feltételnek.
Az (5) állítás sosem teljesül.

Az első négy kérdés tisztázása ***2-2 pont.*** Az ötödik kérdés helyes indoklása ***4 pont.***

2. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész számot nevezzünk *egoistá*nak, ha minden számjegye annyiszor szerepel a számban, amennyi maga a számjegy. Egoista szám például a 1424442. Hány hétjegyű egoista szám van? ***(15 pont)***

Megoldás. Egy hétjegyű egoista számban lévő különböző számjegyek összege 7. (Ha például kétféle számjegy van, *a* és *b*, akkor ezekből *a*, illetve *b* darab van, és ezek kiadják a hétjegyű szám összes számjegyét, tehát $a + b = 7$.) ***2 pont***

A számjegyek között nem lehet 0. A 7-et kell különböző számok (számjegyek) összegeire bontani, hogy megtaláljuk az egoista számokat. ***2 pont***

$7 = 7$ esethez a 7 db 7-esből álló számok tartoznak. 1 ilyen szám van. ***1 pont***

$7 = 1 + 6$ eset az 1 db 1-est és 6 db 6-ost tartalmazó számokat jelenti. 7 ilyen szám van, hiszen az 1-es 7-féle helyiértéken állhat. ***1 pont***

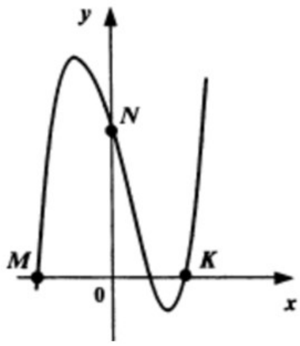
$7 = 2 + 5$ eset a 2 db 2-est és 5 db 5-öst tartalmazó számokat jelenti. $\binom{7}{2} = 21$ ilyen szám van. ***2 pont***

$7 = 3 + 4$ eset a 3 db 3-ast és 4 db 4-est tartalmazó számokat jelenti. $\binom{7}{3} = 35$ ilyen szám van. ***2 pont***

$7 = 1 + 2 + 4$ esetén a számjegyek $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4)$. Ezekből $\frac{7!}{1!\cdot 2!\cdot 4!} = 105$ szám képezhető.
2 pont

A hétjegyű egoista számok száma: $1 + 7 + 21 + 35 + 105 = 169$. ***3 pont***

3. Az ábrán az $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonját látjuk.



Határozza meg az *M, N, K* pontok koordinátáit. ***(13 pont)***

Megoldás. A függvény az *y*-tengelyt az *N* pontban metszi, az $x = 0$ helyettesítés adja a pont második koordinátáját. ***2 pont***

$x = 0$ helyettesítésre $x^3 - x^2 - 4x + 4$ értéke 4. ***1 pont***

Így $N(0;\ 4)$. ***2 pont***

Az *M* és *K* pontok a függvény zérushelyeit jelölik. ***2 pont***

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x^2-4)(x-1) = (x-2)(x+2)(x-1)$$
3 pont

Az $x = -2, 1, 2$ zérushelyek közül a két szélsőt jelöli *M* és *K*. ***1 pont***

Ez a két pont: $M(-2; 0)$ és $K(2; 0)$. ***2 pont***

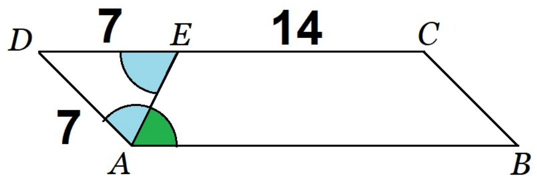
4. Mekkora a paralelogramma kerülete, ha egyik szögének szögfelezője az egyik oldalt 7 és 14 egység hosszú részekre vágja? ***(16 pont)***

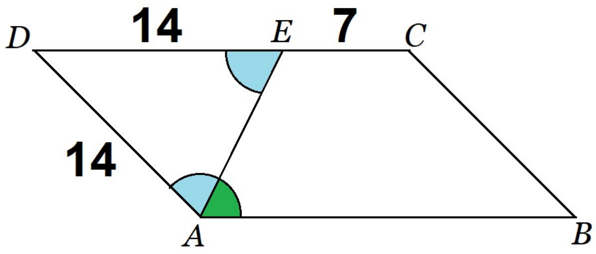
Megoldás. Az *A* csúcsnál lévő szöget a szögfelező két egyenlő részre osztja: $EAB\angle = DAE\angle$.
2 pont

Az *A* és *E* csúcsnál lévő szögek váltószögek, tehát $EAB\angle = DEA\angle$. ***2 pont***

Ezek miatt $DAE\angle = DEA\angle$. ***2 pont***

Tehát a *DAE* háromszög egyenlő szárú: $DA = DE$. ***2 pont***





Jó ábrákra adjunk ***2-2 pontot***.

A szögfelező a paralelogramma DC oldalát kétféle módon oszthatja 7 és 14 egység hosszú részekre, $DE = 7$ vagy $DE = 14$. Ennek megfelelően $DA = 7$ vagy $DA = 14$. ***2 pont***

Így a paralelogramma két oldala 7 és $7 + 14 = 21$, ekkor a kerület $2(21 + 7) = 56$; vagy 14 és $14 + 7 = 21$, ekkor a kerület $2(14 + 21) = 70$. ***2 pont***

5. Oldja meg a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x$ egyenletet a valós számok körében! ***(14 pont)***

Megoldás. Az egyenlet bal oldala $a + \frac{1}{a}$ alakú, ahol $a = \operatorname{tg} x$. ***2 pont***

A bal oldal értéke (ha pozitív) legalább 2, a jobb oldal értéke legfeljebb 2. Egyenlőség csak úgy lehet, ha mindkét oldalon 2 áll. ***2 pont***

Ha negatív érték áll a bal oldalon, akkor mindkét oldalon -2 áll. ***2 pont***

Tehát a megoldásokat a

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases}$$

és a

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

egyenletrendszerek megoldásai adják. ***4 pont***

Ezek a megoldások: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, ahol k tetszőleges egész szám. ***4 pont***

6. Tekintsük az alábbi egyenlőtlenségeket.

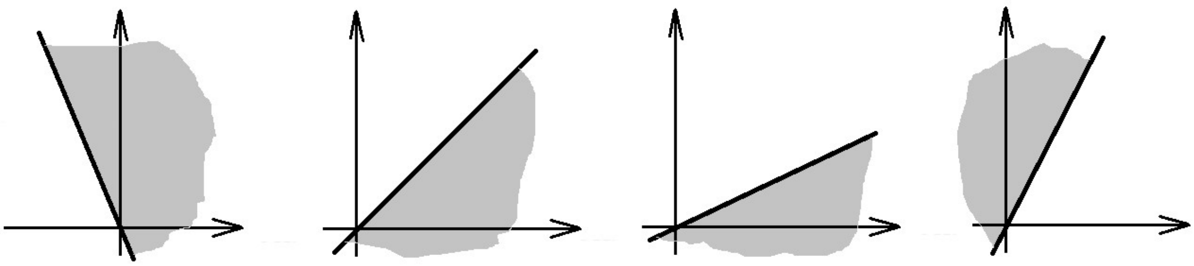
(1) $2x + y > 0$ (2) $x - y > 0$ (3) $x - 2y > 0$ (4) $y - 2x > 0$

Vannak-e olyan *x, y* valós számok, melyekre

a) mind a négy egyenlőtlenség teljesül?
b) egyik egyenlőtlenség sem teljesül?
c) pontosan két egyenlőtlenség teljesül?

(15 pont)

Megoldás. Tekintsük a koordinátarendszerben a
$2x + y > 0$, $x - y > 0$, $x - 2y > 0$, $y - 2x > 0$ félsíkokat.



(1) $2x + y > 0$ (2) $x - y > 0$ (3) $x - 2y > 0$ (4) $y - 2x > 0$

a) Látható, hogy mind a négy félsíknak nincs közös belső pontja, ezért nincs olyan x, y valós szám, melyekre mind a négy egyenlőtlenség teljesül. (Tehát a válasz: NINCS.)

b) Látható, hogy a sík bármely pontja rajta van legalább az egyik félsíkon, ezért bárhogyan választunk x és y valós számot, azok legalább az egyik egyenlőtlenséget teljesítik. (A válasz: NINCS.)

c) Van olyan számpár, például $x = 1, y = 3$, melyekre pontosan két egyenlőtlenség teljesül. A $2x + y > 0$, $y - 2x > 0$ egyenlőtlenségek teljesülnek, és az $x - y > 0$, $x - 2y > 0$ egyenlőtlenségek nem.

Mindegyik kérdés helyes indoklással ***5 pont.*** Ha nincs indoklás, csak helyes válasz, arra adjunk ***1 pontot.***

7. Hány olyan 10-nél kisebb pozitív egész számokból álló (a, b, c) rendezett számhármas van, melyre $a \cdot b \cdot c$ osztható 20-szal? ***(15 pont)***

Megoldás. Két esetet vizsgálunk.
Az első esetben a három szám egyike 5, és a másik kettő páros. ***2 pont***
Ekkor $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ lehetőség van: az 5 pozíciója 3-féle lehet, és a páros számot mindkét helyen 4-féleképp választhatjuk. ***2 pont***

A második esetben a három szám egyike 5, és a másik kettő egyike páratlan, míg a másik 4-gyel osztható. Itt a lehetőségeket szétválasztjuk aszerint, hogy a három szám között egy vagy két 5-ös van. ***2 pont***
Nézzük, ha csak az egyik szám 5-ös. Az 5 és a 4-gyel osztható szám helyét $3 \cdot 2$-féle módon jelölhetjük ki; a 4-gyel osztható számot 2 szám közül választjuk; az 5-től különböző páratlan szám 4-féle lehet (1, 3, 7, 9). Ez $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4$ lehetőség. ***2 pont***
Ha a páratlan szám 5, akkor a három szám közül kettő 5, a harmadik 4-gyel osztható, ez $3 \cdot 2$ számhármas. ***2 pont***
Ezek együtt $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 54$ lehetőséget jelentenek. ***2 pont***

Ez a két lehetőség van: egy páratlan szám van közöttük, ez az 5; illetve két páratlan szám van és egy páros (ekkor a páratlanok közül legalább az egyik szám 5, a páros pedig 4-gyel osztható). Más lehetőség nincs. ***1 pont***
A két eset alapján a számhármasok száma összesen $48 + 54 = 102$. ***2 pont***