(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Hány egész szám esetén teljesül a $\frac{2}{|x|} \geq \frac{1}{3}$ egyenlőtlenség?

(14 pont)

Megoldás:

Az egyenlőtlenségnek nincs értelme $x = 0$ esetén.

(2 pont)

Pozitív értékekkel szorozva:

$|x| \leq 6$

(5 pont)

Ez $-6 \leq x \leq 6$ esetén teljesül.

(4 pont)

Mivel a 0-t kizártuk, ezért ebben az intervallumban található egész megoldások száma 12.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. 2019-ben egy madárpopuláció az előző évihez képest 20%-kal csökkent, majd 2020-ban 20 %-kal növekedett. 2021-ben viszont pontosan annyi lett, mint 2018-ban. Hány százalékos volt ekkor a változás a 2020-as évhez viszonyítva?

(14 pont)

Megoldás:

Legyen p a 2018-as populáció száma és változzon 2021-ben a 2020-ashoz képest az x-szeresére.

(2 pont)

A feltételek szerint:

2019-ben: $p \cdot 0{,}8$

2020-ban: $p \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2$

2020-ban: $p \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot x$

lesz a madarak száma.

(5 pont)

Ezek alapján felírható, hogy

$p \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot x = p$

Ennek megoldása:

$x = \frac{25}{24} \approx 1{,}042$

(5 pont)

Ez 4,2%-os növekedést jelent az előző évihez képest.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. Mennyi a hárommal nem osztható kétjegyű pozitív számok összege?

(16 pont)

Megoldás:
Legyen A a kétjegyű pozitív egészek halmaza, ebben az elemek száma $|A| = 90$.

(2 pont)

A hárommal osztható kétjegyű pozitív egészek halmaza B, ennek elemszáma $|B| = 30$.

(2 pont)

Az A halmaz elemeinek összege:

$$\frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905$$

(5 pont)

A B halmaz eleminek összege:

$$\frac{12+99}{2} \cdot 30 = 1665$$

(5 pont)

A keresett összeg ezek különbsége lesz:

$4905 - 1665 = 3240.$

(2 pont)

Összesen: 16 pont

4. Van-e olyan háromszög, melyben mindhárom magasság nagyobb, mint 2 cm, a háromszög területe mégis kisebb mint 1 cm^2?

(18 pont)

Megoldás:

Feltehetjük, hogy a háromszög oldalaira teljesül, hogy $a \geq b \geq c$. Legyen az a oldalhoz tartozó magasság m_a.

(2 pont)

A háromszög területére: $\frac{a \cdot m_a}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot m_a < 2$

(6 pont)

A feltétel szerint $m_a > 2$. Így a legnagyobb oldalra teljesül, hogy: $a < 1$
ami azt jelenti, hogy a háromszög mindegyik oldal kisebb lesz mint 1 cm.

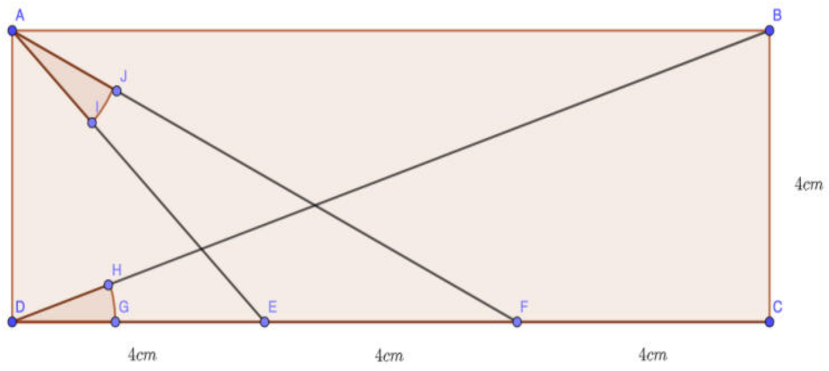
(4 pont)

Ha a a legnagyobb oldal, akkor a háromszög nem lehet a befogójú derékszögű háromszög. Ha a nem magassága a háromszögnek, akkor a háromszög b és c oldala olyan m_a befogójú derékszögű háromszögek átfogói lennének, melyben a befogó hosszabb lenne, mint az átfogó. Tehát ilyen háromszög nem létezhet.

(6 pont)

Összesen: 18 pont

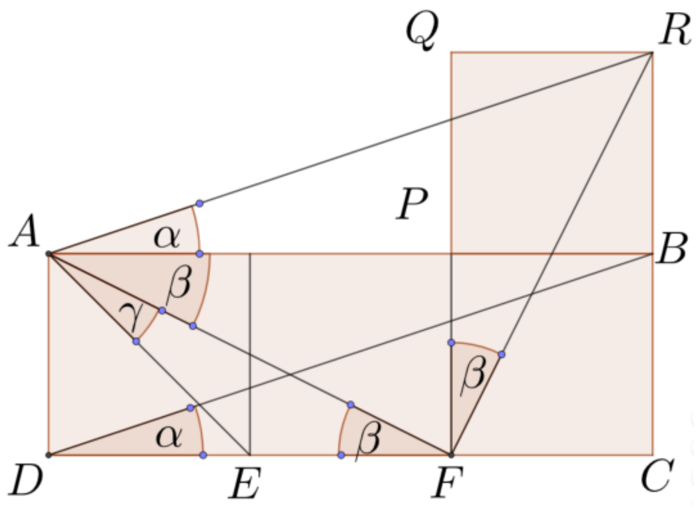
5. **Az ábrán látható téglalap oldalainak hossza 12 cm és 4 cm. Az *E* és *F* pontok**



harmadoló pontok. Igaz-e, hogy az ábrán bejelölt *GDH* és *EAF* szögek egyenlők?

(18 pont)

<u>*Megoldás:*</u>
Forgassuk el az FPAD téglalapot F körül 90°-kal az ábra szerint. (A képe FCRQ.)



(6 pont)

Az ábrában azonos betűvel jelöljük azokat a szögeket, melyek egybevágó derékszögű háromszögek alapján egyenlőek lesznek.
Az α szögek, az *ABR* és *DCB* egybevágó háromszögek alapján.

(3 pont)

A β szögek a *DFA*, *APF* és *FQR* egybevágó háromszögek alapján.

(3 pont)

Mivel *AED* és *ARF* háromszögek is egyenlőszárú derékszögű háromszögek, ezért
$\beta + \gamma = 45°$
$\beta + \alpha = 45°$

(4 pont)

Ennek alapján a két szög egyenlősége következik.

(2 pont)
Összesen: 18 pont

6. Egy kilátó tetejére egy 100 lépcsőből álló lépcsősor vezet fel. Peti hol egyet, hol kettőt lépdelve jutott fel rá. Hány olyan lépcső van ezek között a lépcsők között, amelyre páros számú lehetősége volt eljutni?

(20 pont)

Megoldás:

Vegyük észre, hogy bármely lépcsőre a 3. lépcsőtől kezdődően az alatta lévő két lépcsőről tud fellépni.

(4 pont)

Az elsőre 1 féleképpen, a másodikra 2 féleképpen juthat.

(2 pont)

Írjuk fel ennek megfelelően sorban az egyes lépcsőkre jutások lehetőségeinek számát:
$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

(4 pont)

Ebben a sorozatban jelöljük – jellel a páratlanokat és + jellel a párosakat:
$- + - - + - - + -$

Egy páratlan és egy páros szám összege páratlan, két páratlan összege páros, ezért észrevehetjük, hogy a $- + -$ hármas sorozat ismétlődve követi egymást, és mindegyikben egy páros számot találhatunk.

(5 pont)

A 100 számban 33 ilyen $- + -$ hármas található és az utolsó 100. szám – azaz páratlan lesz. Tehát azoknak a lépcsőknek a száma, melyekre páros lehetőséggel juthat 33 lesz.

(5 pont)

Összesen: 20 pont