(9. osztály)

Megoldások

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. **Hány egész szám esetén teljesül a $\frac{2}{|x|} \geq \frac{1}{3}$ egyenlőtlenség?**

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Az egyenlőtlenségnek nincs értelme $x = 0$ esetén.

(2 pont)

Pozitív értékekkel szorozva:

$|x| \leq 6$

(5 pont)

Ez $-6 \leq x \leq 6$ esetén teljesül.

(4 pont)

Mivel a 0-t kizártuk, ezért ebben az intervallumban található egész megoldások szám 12.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. **2019-ben egy madárpopuláció az előző évihez képest 20%-kal csökkent, majd 2020-ban 20 %-kal növekedett. 2021-ben viszont pontosan annyi lett, mint 2018-ban. Hány százalékos volt ekkor a változás a 2020-as évhez viszonyítva?**

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Legyen p a 2018-as populáció száma és változzon 2021-ben a 2020-ashoz képest az x-szeresére.

(2 pont)

A feltételek szerint:

2019-ben: $p \cdot 0{,}8$, 2020-ban: $p \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2$, 2020-ban: $p \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot x$

lesz a madarak száma.

(5 pont)

Ezek alapján felírható, hogy

$p \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot x = p$

Ennek megoldása:

$x = \frac{25}{24} \approx 1{,}042$

(5 pont)

Ez 4,2%-os növekedést jelent az előző évihez képest.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. Mennyi a hárommal nem osztható kétjegyű pozitív számok összege?

(16 pont)

Megoldás:

Legyen *A* a pozitív egészek halmaza, ebben az elemek száma $|A| = 90$.

(2 pont)

A hárommal osztható pozitív egészek halmaza *B*, ennek elemszáma $|B| = 30$.

(2 pont)

Az *A* halmaz elemeinek összege:

$$\frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905$$

(5 pont)

A *B* halmaz eleminek összege:

$$\frac{12+99}{2} \cdot 30 = 1665$$

(5 pont)

A keresett összeg ezek különbsége lesz:

$4905 - 1665 = 3240.$

(2 pont)

Összesen: 16 pont

4. Melyek azok a különböző *A, B* számjegyek, melyekre teljesül, hogy

$$\begin{array}{r} A\,B \\ B\,A \\ B \\ +\quad A \\ \hline 120 \end{array}$$

(18 pont)

Megoldás:

Írjuk fel az összeadást a helyiértékek használatával:

$10A + B + 10B + A + B + A = 120$

(4 pont)

Összevonva és rendezve:

$12A + 12B = 120$

$A + B = 12$

(4 pont)

Figyelembe véve, hogy A és B számjegyeket jelöl, így a következő esetek fordulhatnak elő:

A	3	4	5	6	7	8	9
B	9	8	7	6	5	4	3

(6 pont)

Mivel A és B különböző számjegyek, ezért ebből az $A = B = 6$ esetet kihagyva hat megoldás adódik, melyek eleget is tesznek a feladatnak.

(4 pont)

Összesen: 18 pont

5. **Egy 8x8-as tábla első sorában és első oszlopában lévő minden mezőt feketére festették, a többit pedig fehérre. A fekete mezők fehérre, a fehérek pedig feketére festhetők, de csak úgy, ha egy lépésben egy teljes sor, vagy egy teljes oszlop valamennyi mezőjének megváltoztatjuk a színét. Elérhető-e, hogy a tábla minden mezője fekete legyen?**

(18 pont)

Megoldás:

Kezdetben az összes fekete mező száma 15, azaz páratlan szám volt.

(2 pont)

Ha egy sorban vagy oszlopban *k* darab fekete mező van, akkor a változtatás hatására $8-k$ lesz belőle.

(4 pont)

Ez a két szám azonos paritású, vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan.

(4 pont)

Tehát az összes fekete számú mező számának paritásán a színezés nem tud változtatni.

(4 pont)

Mivel kezdetben páratlan volt ezek száma, így a végén nem kaphatunk 64-et, ami páros. Tehát a kért feltétel nem érhető el.

(4 pont)

Összesen: 18 pont

6. **Adott a síkon két párhuzamos egyenes: *e* és *f*. Az *e* egyenesen felvettünk néhány pontot, az *f* egyenesen pedig 7-et. Ezután megrajzoltuk az összes olyan háromszöget melynek két csúcsa az *e*, egy csúcsa pedig az *f* egyenes pontjai közül való. Így összesen 315 háromszöget rajzoltunk meg. Hány pontot vettünk fel az *e* egyenesen?**

(20 pont)

Megoldás:

Jelöljük az *e* egyenesen felvett pontok számát *n*-nel. Ez nyílván egy pozitív egész szám lesz.

(2 pont)

Háromszögeket úgy kapunk, ha az *e* egyenesről az összes lehetséges módon kiválasztunk két pontot és minden pontpárhoz egy pontot az *f* egyenesről.

(3 pont)

A kiválasztható pontpárok száma az e egyenesről:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

(5 pont)

A létrehozható háromszögekre teljesül, hogy:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 7 = 315$$

$$n\cdot(n-1) = 90$$

(5 pont)

Két egymás utáni pozitív egész szám szorzataként 90 csak a $90 = 10\cdot 9$ alakban írható fel. Így az *e* egyenesen felvett pontok száma $n = 10$ lesz, mely valóban eleget tesz a feladat feltételeinek.

(5 pont)

Összesen: 20 pont