

(10. osztály)

*Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!*

- 1. Egy egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó külső szöge kétszerese a szárak által bezárt szögnek. Mekkora a háromszög belső szögei?**

**(14 pont)**

Megoldás:

Legyen a szárak által bezárt szög nagysága  $x$ , az alapon levő szögeké  $y$ .

(2 pont)

Tudjuk, hogy a háromszög egy külső szöge egyenlő a nem mellette levő belső szögek összegével, ezért

$$x + y = 2x$$

(5 pont)

Ahonnét  $x = y$  adódik. Azaz a háromszög minden szöge ugyanakkora, vagyis egyenlő oldalú.

(4 pont)

Mindegyik szöge  $60^\circ$ -os.

(3 pont)

**Összesen: 14 pont**

- 2. Legalább hányan vettek részt azon a rendezvényen, ahol a résztvevők  $\frac{2}{7}$  része ült, és ők a teremben található székek  $\frac{3}{5}$  részét foglalták el. (Minden széken legfeljebb egy ember ült.)**

**(14 pont)**

Megoldás:

Jelölje a résztvevők létszámát  $x$ , a székek számát pedig  $y$ .

(2 pont)

A feltételek szerint:

$$\frac{2}{7}x = \frac{3}{5}y$$

mely alapján

$$10x = 21y$$

(4 pont)

A 10 és 21 relatív prímek és a személyek száma és a székek száma is csak egész szám lehet, ezért a legkisebb egészek, melyek ennek az egyenletnek eleget tehetnek

$$x = 21, y = 10$$

(4 pont)

Így a rendezvényen legalább 21-en vettek részt.

(2 pont)

Ell.: Ez lehetséges is. Hat ember ült széken, ez valóban a 21-nek  $\frac{2}{7}$ , a 10-nek  $\frac{3}{5}$  része.

(2 pont)

**Összesen: 14 pont**

3. A tervek szerint, ha reggel 8-kor indulunk Szegedről Budapestre, akkor 11 órára érkezünk a célállomásra. Hány órára érkezünk meg, ha az átlagsebességünket 20%-kal növelni tudjuk?

(16 pont)

Megoldás:

Jelölje az eredeti sebességet  $v$ , az eredeti menetidőt  $t_1 = 3$  óra.

(2 pont)

A feltételek miatt a célállomás távolsága

$$s = v \cdot t_1$$

(3 pont)

A megnövelt sebességgel ezt  $t_2$  idő alatt teszi meg

$$s = 1,2 \cdot v \cdot t_2$$

(4 pont)

Ezek alapján

$$t_2 = \frac{t_1}{1,2} = 2,5$$

(4 pont)

Azaz 10 óra 30 percre érkezünk meg.

(3 pont)

**Összesen: 16 pont**

4. Határozzuk meg azokat az  $a, b, c$  pozitív valós számokat melyekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b + c) &= 8, \\(b + c)(b + c + a) &= 11, \\(c + a)(c + a + b) &= 13.\end{aligned}$$

(18 pont)

Megoldás:

Adjuk össze a három egyenletet és emeljünk ki  $(a + b + c)$ -t. Így a következő egyenletre jutunk:

$$2(a + b + c)^2 = 32$$

(4 pont)

Figyelembe véve, hogy  $a, b$  és  $c$  pozitív valós számok, ezért

$$a + b + c = 4$$

(4 pont)

Ezt az eredeti egyenletrendszerbe visszahelyettesítve

$$(a + b) = 2,$$

$$(b + c) = \frac{11}{4},$$

$$(c + a) = \frac{13}{4}.$$

(4 pont)

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai:

$$a = \frac{5}{4}, b = \frac{3}{4}, c = 2$$

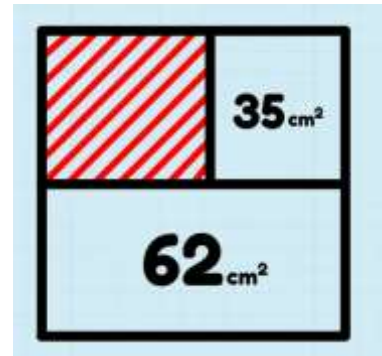
(4 pont)

Ezek helyességét az ellenőrzés igazolja.

(2 pont)

**Összesen: 18 pont**

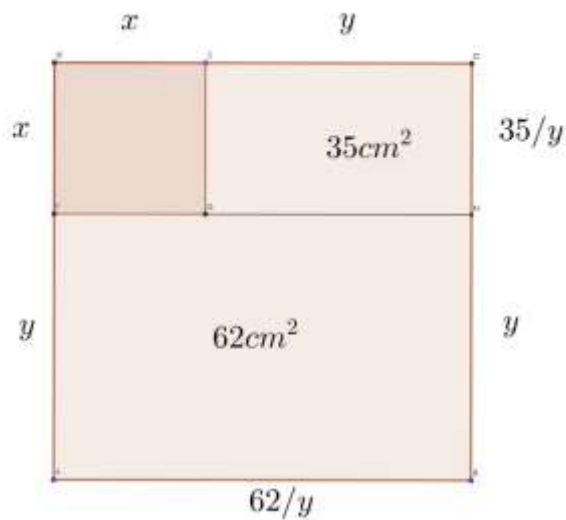
5. Az ábrán látható négyzet három részre van osztva – két téglalapra és egy kisebb négyzetre (az árnyékolt terület). A nagyobb téglalap területe  $62 \text{ cm}^2$ , a kisebbé  $35 \text{ cm}^2$ . Határozzuk meg az árnyékolt rész területét!



(18 pont)

Megoldás:

Használjuk az alábbi ábra jelöléseit, figyelembe véve az ismert területek nagyságát.



(5 pont)

Felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} xy &= 35 \\ x + y &= \frac{62}{y} \end{aligned}$$

(5 pont)

A második egyenletbe  $y = \frac{35}{x}$ -et helyettesítve:

$$x + \frac{35}{x} = \frac{62x}{35}$$

adódik.

Ezt átrendezve: (4 pont)

$$x^2 = \frac{1225}{27}$$

(3 pont)

ami éppen a keresett satírozott négyzet területe, azaz  $\frac{1225}{27} \text{ cm}^2$ .

(1 pont)

**Összesen: 18 pont**

**6. Két kétjegyű prímszám különbsége négyzetszám. Az egyik prímet a másiktól úgy nyerhetjük, ha a számjegyeit felcseréljük. Melyek ezek a kétjegyű prímszámok?**  
(20 pont)

Megoldás:

Jelölje a prímszámok számjegyeit  $a$  és  $b$ . Így a két prímszám  $10a + b$  és  $10b + a$  lesz. Mivel ezek prímek, ezért ezek számjegyei csak az 1, 3, 7 és 9 számjegyek közül kerülhetnek ki.

(3 pont)

A feltételek szerint ezek különbsége négyzetszám:

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = k^2$$

(5 pont)

Mivel 9 négyzetszám, így  $a - b$  tényezőnek is négyzetszámnak kell lennie.

(2 pont)

Ennek egyik megoldásaként az

$$a = b = 1$$

felel meg. Ekkor a 11 prímszám teljesíti a feltételt, hiszen  $11 - 11 = 0$ , ami négyzetszám.

(3 pont)

Megvizsgálva a többi lehetséges különbséget, csak az  $a = 7, b = 3$  eredményez különbséggként négyzetszámot, 4-et.

(5 pont)

Ekkor a két prímszám különbsége  $73 - 37 = 36$  valóban négyzetszám lesz.

(2 pont)

**Összesen: 20 pont**