

12. évfolyam gimnázium, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Az $A = \{1; 2; 3; \dots; 400\}$ halmaz elemeit párokba rendezzük úgy, hogy a halmaz minden eleme pontosan egy párnak legyen tagja. Az így kialakuló párok mindegyikére képezzük a párt alkotó két szám összegét.
- a) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a kapott összegek mindegyike 3-mal osztható.
- b) Lehetséges-e, hogy a kapott összegek mindegyike osztható 5-tel?

a) Ha a kialakuló párok mindegyikében 3-mal osztható lenne a számok összege, akkor az első 400 pozitív egész összege is 3-mal osztható lenne.	1 pont
Az első 400 darab pozitív egész szám összege ugyanakkor $1 + 2 + \dots + 400 = \frac{401 \cdot 400}{2} = 401 \cdot 200 = 80200,$	2 pont
ami nem osztható 3-mal,	1 pont
így nem lehet minden pár összege 3-mal osztható.	1 pont
b) A kapott összegek mindegyike lehet 5-tel osztható.	1 pont
Az egész számok 5-ös maradéka 0, 1, 2, 3 vagy 4 lehet. Osszuk az első 400 darab pozitív egész számot a fenti 5 csoportra. Ekkor minden csoportba 80 darab szám kerül.	2pont
A 80 darab 5-tel osztható számot tetszőleges módon párba állíthatjuk, minden párban 5-tel osztható lesz a számok összege. Az 5-tel osztva 1 maradékot adó számokat a 4 maradékot adó számokkal tetszőleges módon párba állítva 5-tel osztható lesz a párok összege. Ehhez hasonlóan az 5-tel osztva 2 maradékot adó számokat a 3 maradékot adó számokkal tetszőleges módon párba állítva 5-tel osztható lesz a párok összege. Ezzel beláttuk, hogy a párba állítás megvalósítható.	2pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzések:

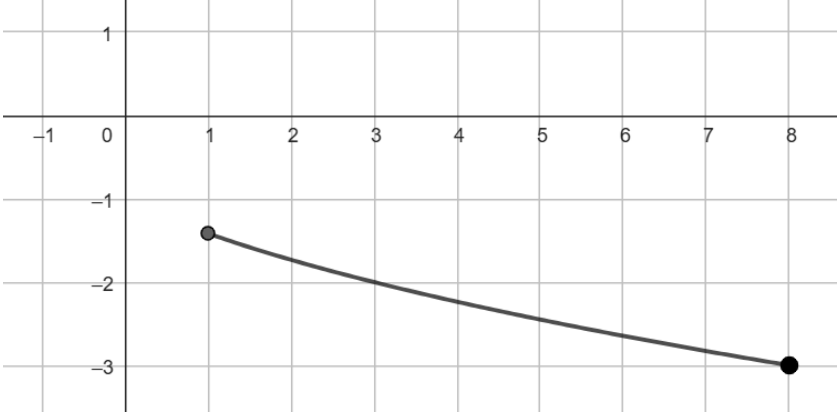
1. A versenyző az a) részre maximális pontot kaphat, ha arra hivatkozik, hogy a párba állítás során 3-mal osztható számnak csak 3-mal osztható szám lehet a párja, de az első 400 darab pozitív egész szám között páratlan sok 3-mal osztható szám van, ezért a párba állítás nem valósítható meg.
2. A b) részre bármilyen jó példa megadása esetén maximális pontszám adható.

2. Egy számtani sorozat első tagja 5, n -edik tagja 12, k -edik tagja 13 ($k > n$).
- a) Bizonyítsuk be, hogy az n szám 7-tel osztva 1 maradékot ad.
- b) Számítsuk ki a k szám 8-cal adott osztási maradékát.

a) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat tagjaira: $a_1 = 5$, $a_n = 12$, $a_k = 13$. Ha a sorozat differenciáját d jelöli, akkor (1) $5 + (n - 1)d = 12$, (2) $5 + (k - 1)d = 13$.	1 pont
A (2) és (1) egyenlőségek megfelelő oldalainak különbsége: $(k - 1)d - (n - 1)d = 1$, $(k - n)d = 1$.	2 pont
Mivel a sorozat differenciája 0-tól különböző, ezért $d = \frac{1}{k - n},$ amit az (1) összefüggésbe helyettesítve $5 + (n - 1) \cdot \frac{1}{k - n} = 12,$ amiből (3) $n - 1 = 7(k - n)$.	2 pont
Rendezés után adódik, hogy $n = 7(k - n) + 1$, amiből következik, hogy az n szám 7-tel osztva 1 maradékot ad.	2 pont
b) A (3) összefüggésből rendezés után azt kapjuk, hogy $8n - 1 = 7k$, majd mindkét oldalból $8k$ -t elvéve $8(n - k) - 1 = -k$, végül -1 -gyel szorozva $k = 8(k - n) + 1$.	2 pont
A k szám 8-cal osztva 1 maradékot ad.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Az f függvényt az $f(x) = \sqrt{x - 1} - \frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ hozzárendelési szabállyal értelmezzük.
- a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát.
- b) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját értelmezési tartományának azon a részhalmazán, amelyek 8-nál nem nagyobb számokból állnak.

a) A négyzetgyök alatt nemnegatív számok állnak, ezért $x + 1 \geq 0$ és $x - 1 \geq 0$, amelyekből $x \geq 1$.	1 pont
A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} \neq 0$, ami minden valós x -re teljesül,	1 pont
ezért a függvény értelmezési tartománya: $[1; \infty[$.	1 pont

b) Az f hozzárendelési szabályában szereplő tört nevezőjének gyöktelenítése után kapjuk, hogy $\frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} =$ $= \frac{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(x+1) - (x-1)} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}.$	3 pont
Ezt felhasználva $f(x) = \sqrt{x-1} - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = -\sqrt{x+1}.$	1 pont
Az f függvény grafikonja a megfelelő halmazon: 	3 pont*
Összesen:	10 pont

*Megjegyzés: Ha a versenyző a függvény ábrázolásánál az értelmezési tartományt figyelmen kívül hagyja, akkor a *-gal jelölt pontokból legfeljebb 1 pontot kaphat.*

4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán. $\left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 + 9 \cdot \frac{x^2}{1 - 4x + 4x^2} = 10$
--

Mivel $1 - 4x + 4x^2 = (1 - 2x)^2$,	1 pont
ezért $x \neq 0$ és $x \neq \frac{1}{2}$.	1 pont
Az egyenlet a következő alakra hozható: $\left(\frac{1 - 2x}{x}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{x}{1 - 2x}\right)^2 = 10.$	1 pont
Vezessük be a $y = \left(\frac{1 - 2x}{x}\right)^2$ helyettesítést, ekkor $y + 9 \cdot \frac{1}{y} = 10,$ amiből $y^2 - 10y + 9 = 0.$	2 pont
A kapott egyenlet megoldásai: $y = 1$ és $y = 9$.	1 pont
Az $\frac{1 - 2x}{x}$ kifejezés lehetséges értékei: 1, -1, 3, -3.	1 pont*

Ha $\frac{1-2x}{x} = 1$, akkor $x = \frac{1}{3}$. Ha $\frac{1-2x}{x} = -1$, akkor $x = 1$. Ha $\frac{1-2x}{x} = 3$, akkor $x = \frac{1}{5}$. Ha $\frac{1-2x}{x} = -3$, akkor $x = -1$.	2 pont*
Az egyenletnek a fenti négy megoldása van. Ellenőrzés mutatja, hogy valóban mind kielégíti az egyenletet.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzések:

1. Ha a versenyző nem találja meg mind a négy megoldást $\frac{1-2x}{x}$ -re, akkor a *-gal jelölt pontokból legfeljebb csak 1 pontot kaphat.

2. A harmadik sorban szereplő egyenlet az alábbi módszerrel is megoldható:

- Teljes négyzetté alakítás után:

$$\left(\frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1-2x}{x} \cdot \frac{x}{1-2x} = 10.$$

- A megfelelő műveletek elvégzése után

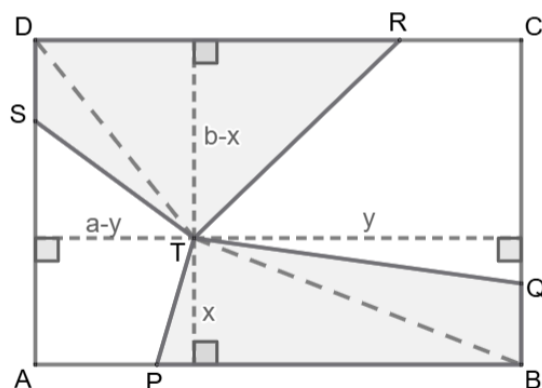
$$\left(\frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x}\right)^2 = 16,$$

$$\text{amiből } \frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x} = 4 \text{ vagy } \frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x} = -4.$$

- A kapott egyenletek mindegyike másodfokú egyenletre vezet.

5. Az ABCD téglalap AB oldalának A-hoz, BC oldalának B-hez, CD oldalának C-hez, valamint DA oldalának D-hez legközelebb eső negyedelő pontja rendre P, Q, R, valamint S. A téglalap egy belső T pontjára teljesül, hogy a PTQB négyszög területe harmadrésze az ABCD téglalap területének. Mekkora az STRD négyszög és az ABCD téglalap területének aránya?

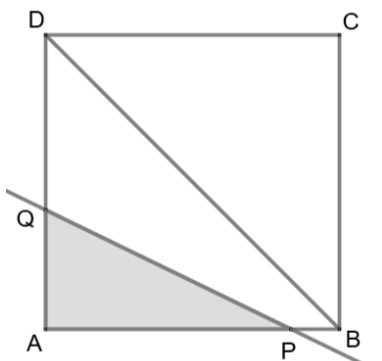
Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. A téglalap AB oldalának hosszát a -val, BC oldalának hosszát b -vel jelöljük. A T pontból a téglalap oldalaira merőlegeseket állítunk és a T pont AB oldaltól való távolságát x , a BC oldaltól való távolságát y jelöli. Ekkor a T pont CD oldaltól való távolsága $b - x$, a DA oldaltól való távolsága $a - y$.

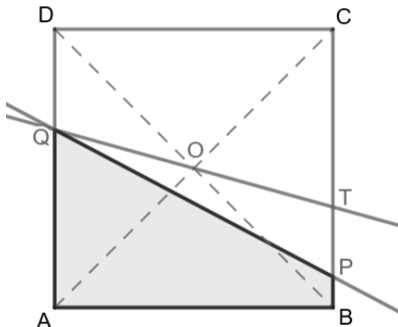


1 pont

A $PTQB$ négyszög területe a PTB és a BTQ háromszögek területének összege, ezért $T_{PTQB} = \frac{\frac{3}{4}ax}{2} + \frac{\frac{1}{4}by}{2} = \frac{3ax + by}{8}.$	2 pont
A feladat feltétele alapján a $PTQB$ négyszög területe az $ABCD$ téglalap területének harmadrésze, ezért $\frac{3ax + by}{8} = \frac{ab}{3},$ amiből (1) $3ax + by = \frac{8}{3}ab.$	2 pont
Az $STRD$ négyszög területe az STD és a DTR háromszögek területének összege, így $T_{STRD} = \frac{\frac{1}{4}b(a-y)}{2} + \frac{\frac{3}{4}a(b-x)}{2} = \frac{4ab - by - 3ax}{8}.$	2 pont
Az (1) összefüggést felhasználva $T_{STRD} = \frac{4ab - (3ax + by)}{8} = \frac{4ab - \frac{8}{3}ab}{8} = \frac{1}{6}ab.$	2 pont
Az $STRD$ négyszög és az $ABCD$ téglalap területének aránya $\frac{1}{6}$.	1 pont
Összesen:	10 pont

6. Egy négyzet csúcsainak koordinátái: $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(2; 2)$ és $(0; 2)$. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes felezi a négyzet területét, továbbá az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabolát két olyan pontban metszi, amelyek első koordinátáinak különbsége $\sqrt{13}$. Határozzuk meg az a és a b paraméter értékét.

Megmutatjuk, hogy ha egy egyenes felezi egy négyzet területét, akkor az egyenes átmegy a négyzet középpontján.	1 pont
A fenti állítás a négyzet átlóira nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy egy egyenes az $ABCD$ négyzet két szomszédos oldalát metszi, az AB oldalt P-ben, az AD oldalt Q-ban. Ekkor az APQ háromszög területe kisebb az ABD háromszög területénél, így a PQ egyenes nem oszthatja két egyenlő területű részre az $ABCD$ négyzetet. 	1 pont

Tegyük fel, hogy egy egyenes az $ABCD$ négyzet két szemközti oldalát metszi, a BC oldalt P-ben, az AD oldalt Q-ban és az egyenes nem megy át a négyzet O középpontján. Jelölje T az OQ egyenes és a BC oldal metszéspontját. Az OQ egyenes az $ABCD$ négyzetet két egybevágó részre bontja, ezért az $ABTQ$ trapéz területe épp az $ABCD$ négyzet területének a fele. A P és a T pontok különböznek egymástól, ezért P a BT vagy a CT szakasz belső pontja. Ha a P pont a BT szakasz belső pontja, akkor az $ABPQ$ négyszög területe kisebb az $ABTQ$ trapéz területénél, így a négyzet területének a felénél is. A négyzet középpontjára nem illeszkedő egyenes ezek szerint nem felezheti a négyzet területét. 	1 pont
A feladatban szereplő négyzet középpontja $O(1; 1)$. Mivel az $y = ax + b$ egyenletű egyenes felezi a négyzet területét, ezért az O pont illeszkedik az egyenesre, így (1) $1 = a + b.$	1 pont
Az egyenes és az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabola metszéspontjainak koordinátáira $\frac{x^2}{2} = ax + b,$ $x^2 - 2ax - 2b = 0.$	1 pont
A kapott egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 8b}}{2}, x_2 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 + 8b}}{2}.$	1 pont
A metszéspontok első koordinátáinak különbségére $x_1 - x_2 = \sqrt{4a^2 + 8b} = \sqrt{13},$ amiből $4a^2 + 8b = 13.$	1 pont
Az (1) összefüggés alapján $b = 1 - a$, amit felhasználva adódik, hogy $4a^2 + 8(1 - a) = 13,$ amiből azt kapjuk, hogy $4a^2 - 8a - 5 = 0.$	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $a = \frac{5}{2}$ és $a = -\frac{1}{2}$.	1 pont
A feladatnak két megoldása van: $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{3}{2}$ és $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$.	1 pont
Összesen:	10 pont