

12. évfolyam gimnázium

I. forduló

1. Az $A = \{1; 2; 3; \dots; 400\}$ halmaz elemeit párokba rendezzük úgy, hogy a halmaz minden eleme pontosan egy párnak legyen tagja. Az így kialakuló párok mindegyikére képezzük a párt alkotó két szám összegét.
- a) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a kapott összegek mindegyike 3-mal osztható.
- b) Lehetséges-e, hogy a kapott összegek mindegyike osztható 5-tel?

(10 pont)

2. Egy számtani sorozat első tagja 5, n -edik tagja 12, k -adik tagja 13 ($k > n$).
- a) Bizonyítsuk be, hogy az n szám 7-tel osztva 1 maradékot ad.
- b) Számítsuk ki a k szám 8-cal adott osztási maradékát.

(10 pont)

3. Az f függvényt az

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

hozzárendelési szabállyal értelmezzük.

- a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát.
- b) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját értelmezési tartományának azon a részhalmazán, amelyek 8-nál nem nagyobb számokból állnak.

(10 pont)

4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 + 9 \cdot \frac{x^2}{1 - 4x + 4x^2} = 10$$

(10 pont)

5. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának A -hoz, BC oldalának B -hez, CD oldalának C -hez, valamint DA oldalának D -hez legközelebb eső negyedelő pontja rendre P , Q , R , valamint S . A téglalap egy belső T pontjára teljesül, hogy a $PTQB$ négyszög területe harmadrésze az $ABCD$ téglalap területének. Mekkora az $STRD$ négyszög és az $ABCD$ téglalap területének aránya?

(10 pont)

6. Egy négyzet csúcsainak koordinátái: $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(2; 2)$ és $(0; 2)$. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes felezi a négyzet területét, továbbá az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabolát két olyan pontban metszi, amelyek első koordinátáinak különbsége $\sqrt{13}$. Határozzuk meg az a és b paraméter értékét.

(10 pont)