

11. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy utcában két parkolóautomata van, mindegyiknél csak pénzérmével lehet fizetni. A második automatában 4%-kal több érme van, mint az elsőben. Ha az első automatából kivennék az érme 48%-át, a másodikkól pedig 260 darabot, akkor az első és a második automatában maradó érme számának aránya 3:4 lenne. Hány pénzérmé van az egyes automatákban?

Jelölje az első automatában lévő érme számát x . Ekkor a második automatában lévő érme száma $1,04x$.	1 pont
Ha az első automatából kivennék az érme 48%-át, a másodikkól pedig 260 darabot, akkor az elsőben $0,52x$, a másodikkban $1,04x - 260$ darab érme maradna.	2 pont
A feltételek alapján felírható egyenlet: $\frac{0,52x}{1,04x - 260} = \frac{3}{4}$	2 pont
A nevezőkkel való szorzás után adódik, hogy $2,08x = 3,12x - 780.$	1 pont
A kapott egyenlet megoldása $x = 750$.	1 pont
Az első automatában 750 darab, a másodikkban 780 darab érme van.	2 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Zsófi szabályos dobókockával egymás után addig dob, amíg valamelyik számot negyedszerre dobja. Dobásainak eredményét egymás mellé lejegyzí.
- a) Hány olyan dobássorozat van, amelyik pontosan 19 dobás után ér véget?
- b) Mi lehet a Zsófi által utoljára dobott szám, ha összesen 18-szor dobott és a lejegyzett számok összege 68?

a) A dobássorozat csak úgy lehet 19 hosszúságú, ha az utolsónak dobott számot 4-szer, a többit 3-szor dobjuk.	1 pont
Az első 18 dobás során mind a 6 számot 3-szor kell dobunk, ezért az első 18 dobás lehetőségeinek száma $\frac{18!}{(3!)^6}$	2 pont
Az utolsó dobás a 6 szám közül bármelyik lehet,	1 pont
ezért a 19 dobás után véget érő dobássorozatok száma $6 \cdot \frac{18!}{(3!)^6}$	1 pont

b) Jelölje a Zsófi által 4-szer dobott számot x . Ekkor Zsófi a többi (x -től különböző) számot összesen 14-szer dobta, ami csak úgy lehetséges, ha az egyik számot 2-szer, a többi négyet 3-szor dobta.	1 pont
Jelölje y azt a számot, amit csak 2-szer dobott. Ekkor az első 17 dobás közt csak az y -szerepel 2-szer, a többi 3-szor, ezért az első 17 dobásának összege $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - y = 63 - y,$	2 pont
így az összes dobásának összegére $63 - y + x = 68,$ amiből $x - y = 5$.	1 pont
Ennek egyetlen megoldása $x = 6$, $y = 1$, ezért Zsófi utoljára csak 6-ost dobhatott.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{2x^2 - 8}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5}} = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$$

Megvizsgáljuk az egyenlet értelmezési tartományát. A négyzetgyökös kifejezések, valamint a törtek miatt $x > 1$, $x > -5$ és $x^2 + 4x - 5 > 0$.	1 pont
A kapott másodfokú egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés szorzattá bontott alakja $x^2 + 4x - 5 = (x - 1) \cdot (x + 5)$, ezért az egyenlőtlenség megoldása $x > 1$ vagy $x < -5$.	1 pont
Összevetve a kapott feltételeket kapjuk, hogy $x > 1$ esetén értelmezhető mindegyik kifejezés.	1 pont
Az egyenletben szereplő másodfokú kifejezések szorzattá alakítása után az egyenlet a $\frac{2(x-2)(x+2)}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5}} = \frac{(x+3)(x-2)}{\sqrt{(x-1)(x+5)}}$ alakban írható.	2 pont
Az értelmezési tartományon a két oldal nevezője megegyezik, ezért $2(x-2)(x+2) = (x+3)(x-2).$	1 pont
Nullára redukálás és kiemelés után kapjuk, hogy $(x-2)(2x+4-x-3) = 0,$ $(x-2)(x+1) = 0.$	1 pont
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.	1 pont
Az $x > 1$ feltételnek x_2 nem tesz eleget, ezért az egyenlet egyetlen megoldása $x = 2$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	10 pont

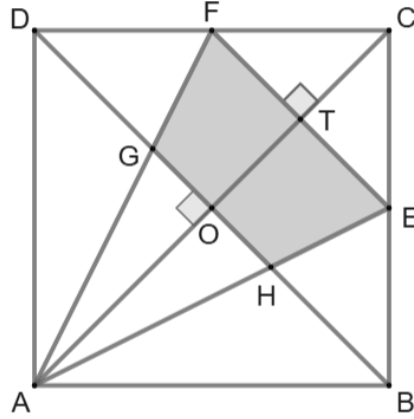
4. Legyen A azoknak a pozitív háromjegyű számoknak a halmaza, amelyeknek az utolsó számjegye 0-tól különböző. Az A halmaz minden x eleméhez hozzárendeljük az $|x - y|$ értéket, ahol y az x számjegyeinek megfordításával kapott háromjegyű számot jelöli. Például az 532-höz az $|532 - 235| = 297$ számot rendeljük.
- a) Hány olyan eleme van az A halmaznak, amelyekhez hozzárendelt érték osztható 6-tal?
- b) Adjuk meg azoknak a számoknak a halmazát, amelyeket valamelyik háromjegyű számhoz hozzárendeltünk.

a) Legyen x az A halmaz egy eleme. Ekkor $x = \overline{abc}$ egy háromjegyű szám, amelyre $a \neq 0, c \neq 0$ teljesül. Az x szám értéke: $x = 100a + 10b + c$. Az x -hez tartozó y : $y = \overline{cba} = 100c + 10b + a$,	1 pont
végül az x -hez hozzárendelt érték: $ x - y = 99(a - c) $.	1 pont
A 6-tal való oszthatóság feltétele a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság. Mivel $99 = 3 \cdot 33$, ezért a kapott érték biztosan osztható 3-mal.	1 pont
Az $ x - y $ pontosan akkor osztható 2-vel, ha $a - c$ páros, amiből következik, hogy a és c azonos paritású. Összesen $5 \cdot 5 = 25$ olyan eset van, amikor mindkettő páratlan, és (tekintettel arra, hogy a és c 0-tól különböző) $4 \cdot 4 = 16$ olyan eset, amikor mindkettő páros.	2 pont
Mivel a középső számjegy (b) tetszőleges lehet, ezért a feltételeknek megfelelő számok száma $25 \cdot 10 + 16 \cdot 10 = 410$.	1 pont
b) Az A halmaz elemeihez azokat a számokat rendeltük, amelyek felírhatók $ 99(a - c) $ alakban, ahol a és c 0-tól különböző számjegyek. Az $ a - c $ lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.	2 pont
Az A elemeihez rendelt számok halmaza tehát $\{0; 99; 198; 297; 396; 495; 594; 693; 792\}$.	2 pont*
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: A hozzárendelt számok halmazát nem szükséges elemeinek felsorolásával megadni. Bármilyen matematikailag szabatos megadási mód elfogadható.

5. Egy 2 egység oldalú $ABCD$ négyzet BC , illetve CD oldalának felezőpontja rendre E és F . A négyzet BD átlója az AE szakaszt H -ban, az AF szakaszt G -ben metszi. Számítsuk ki az $EFGH$ négyszög és az $ABCD$ négyzet területének arányát.

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján



Mivel EF középvonal a BCD háromszögben, ezért EF és BD párhuzamosak, így az $EFGH$ négyszög trapéz.

1 pont

Az $ABCD$ négyzet BD átlójára $BD = 2 \cdot \sqrt{2}$. A BCD háromszög EF középvonala feleakkora, mint a vele párhuzamos oldal, ezért

$$EF = \frac{BD}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

1 pont

A négyzet AC átlója merőleges BD -re, így merőleges az azzal párhuzamos EF szakaszra is. Ebből következik, hogy ha az AC átló az EF szakaszt T -ben, a BD átlót O -ban metszi, akkor OT egyben az $EFGH$ trapéz magassága is.

Az EFC egyenlő szárú derékszögű háromszögben $CT = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért az $EFGH$ trapéz magasságára

$$OT = OC - CT = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2 pont

Az AHG és AEF háromszögek hasonlóak egymáshoz, hiszen szögeik páronként megegyeznek.

1 pont

A két háromszög hasonlóságának λ aránya megegyezik a HG és EF oldalakhoz tartozó magasságuk arányával, azaz

$$\lambda = \frac{AO}{AT} = \frac{AO}{AO + OT} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

1 pont

Ebből következik, hogy

$$HG = \lambda \cdot EF = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

1 pont

Az $EFGH$ trapéz területére

$$T_{EFGH} = \frac{HG + EF}{2} \cdot OT = \frac{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{6}.$$

1 pont

Az $ABCD$ négyzet területe $T_{ABCD} = 4$,

1 pont

így az $EFGH$ trapéz és az $ABCD$ négyzet területének aránya	
$\frac{T_{EFGH}}{T_{ABCD}} = \frac{5}{24}.$	1 pont
Összesen:	10 pont

6. Határozzuk meg azokat a $(b; c)$ számpárokat, amelynek mindkét tagja 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám, és amelyre az
- $$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$$
- hozzárendelési szabállyal értelmezett függvénynek két (különböző) zérushelye van.

Az f függvény hozzárendelési szabályában x kiemelhető: $f(x) = x \cdot (x^2 + bx + c).$	1 pont																						
Vizsgáljuk az $x \cdot (x^2 + bx + c) = 0$ egyenletet. Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért az $x = 0$ a paraméterek értékétől függetlenül zérushelye az f függvénynek.	1 pont																						
Az f függvénynek pontosan akkor van két különböző zérushelye, ha az $x^2 + bx + c = 0$ egyenletnek pontosan egy (0-tól különböző) zérushelye van.	1 pont																						
Ennek feltétele, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen,	1 pont																						
azaz $b^2 - 4c = 0$, így $b^2 = 4c$.	1 pont																						
Ez utóbbiból adódik, hogy c egy 100-nál nem nagyobb (pozitív) négyzetszám,	2 pont																						
azaz c lehetséges értékei: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.	1 pont																						
A feladat feltételeinek 10 számpár tesz eleget, ezeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze.																							
<table><tr><td>b</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>18</td><td>18</td><td>20</td></tr><tr><td>c</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td><td>49</td><td>64</td><td>81</td><td>100</td></tr></table>	b	2	4	6	8	10	12	14	18	18	20	c	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	2 pont
b	2	4	6	8	10	12	14	18	18	20													
c	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100													
Összesen:	10 pont																						

Megjegyzés: A fenti megoldások mindegyike esetén valóban két különböző zérushellyel rendelkezik az f függvény, hiszen az f -ben szereplő másodfokú tényezőnek a 0 egyetlen esetben sem zérushelye. A versenyző akkor is megkaphatja a maximális pontszámot, ha erre nem hivatkozik, illetve ha a kapott megoldások helyességét nem ellenőrzi.