

12. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Anna és Bella mindketten a múlt hónapban helyezkedtek el egy új cégnél. A két lány első havi fizetésének aránya 10:9, míg kiadásai aránya 19:18 volt. Fizetése hány százalékát takarította meg Anna, ha az első havi megtakarításuk aránya 4:3?

Anna fizetését $10x$, Bella fizetését $9x$ alakban írhatjuk ($x > 0$).	1 pont
A kiadások aránya alapján Anna $19y$, Bella $18y$ összeget költött ($y > 0$).	1 pont
Anna megtakarítása ekkor $10x - 19y$,	1 pont
Bella megtakarítása pedig $9x - 18y$.	1 pont
A megtakarítások aránya alapján felírható a $\frac{10x - 19y}{9x - 18y} = \frac{4}{3}$ egyenlet.	2 pont
A nevezőkkel való szorzás, rendezés és összevonások után adódik, hogy $15y = 6x,$ $5y = 2x.$	1 pont
Ezt felhasználva kapjuk, hogy Anna megtakarítása $10x - 19y = 5 \cdot (2x) - 19y = 5 \cdot (5y) - 19y = 6y,$	1 pont
megtakarításának és fizetésének aránya pedig $\frac{6y}{10x} = \frac{6y}{25y} = \frac{6}{25},$	1 pont
azaz Anna fizetésének 24%-át takarította meg.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$2 \cdot 4^x + 6^x = 16 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x$$

Az egyenlet bal oldalán is 2-es, illetve 3-as alapú hatványokat alakítunk ki: $2 \cdot 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 16 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x.$	2 pont
Az egyenlet 0-ra redukálása után kiemeléseket végzünk: $2 \cdot 2^x \cdot (2^x - 8) + 3^x \cdot (2^x - 8) = 0.$	2 pont
A bal oldalt szorzattá alakítva kapjuk, hogy $(2^x - 8) \cdot (2 \cdot 2^x + 3^x) = 0.$	1 pont
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $2^x = 8,$ vagy $2 \cdot 2^x + 3^x = 0.$	2 pont

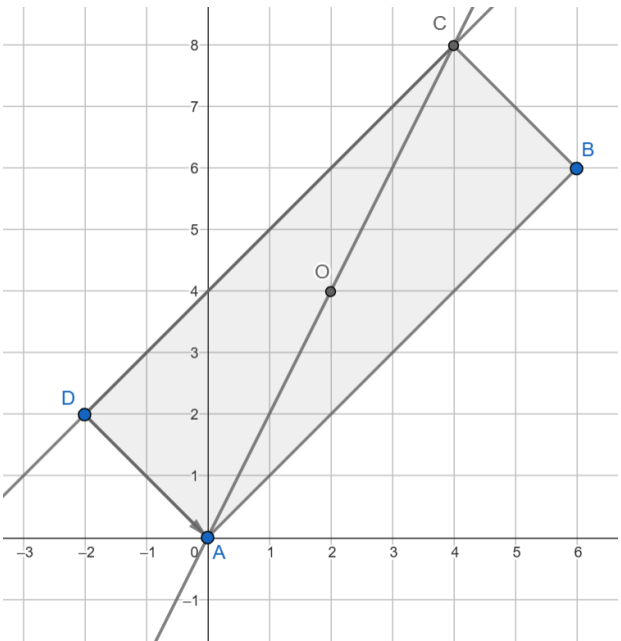
Az utóbbi egyenlet bal oldalán két pozitív értékű kifejezés összege áll, ezért ennek az egyenletnek nincs megoldása.	1 pont
Ha $2^x = 8$, akkor $x = 3$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása az egyenletnek.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Legyen $A = 240 \cdot 30^n$, ahol n pozitív egész számot jelöl.
- a) Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan pozitív egész szám, amelyet n helyére helyettesítve az A szám értéke négyzetszám.
- b) Melyek azok az n számok, amelyekre az A szám értéke egy másik egész szám harmadik hatványa?

a) Mivel $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ és $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ezért az A szám prímtényezős felbontása $A = 2^{n+4} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}.$	2 pont
Az $n + 1$ és az $n + 4$ értéke biztosan különböző paritású, ezért az A számban a 2 és a 3 (valamint vele együtt az 5) kitevője közül az egyik páros, a másik páratlan.	2 pont
A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímosztó kitevője páros,	1 pont
ezért az A szám valóban nem lehet négyzetszám.	1 pont
b) Ha az A szám egy másik egész szám harmadik hatványa, akkor A prímtényezős felbontásában minden prímosztó kitevője 3-mal osztható.	1 pont
Mivel $(n + 4) - (n + 1) = 3$, ezért elegendő azt vizsgálni, hogy $n + 1$ mely n -ek esetén osztható 3-mal (ekkor természetesen $n + 4$ is ilyen tulajdonságú).	1 pont
Az $n + 1$ értéke pontosan akkor osztható 3-mal, ha n 3-as maradéka 2, ezek azok az n értékek, amely esetén az A értéke egy másik egész szám harmadik hatványa.	2 pont
Összesen:	10 pont

4. Az $ABCD$ téglalap két csúcsának koordinátái: $A(0; 0), D(-2; 2)$. A téglalap C csúcsa illeszkedik az $y = 2x$ egyenletű egyenesre. Határozzuk meg a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit.

Első megoldás

A $\overrightarrow{DA}$ vektor koordinátái: $\overrightarrow{DA}(2; -2)$. 		1 pont
A DC egyenesnek a fenti vektor normálvektora, ezért a DC egyenes egyenlete: $2x - 2y = -8,$ $x - y = -4.$		2 pont
A téglalap C csúcsa illeszkedik a DC egyenesre, valamint az $y = 2x$ egyenletű egyenesre is, ezért koordinátáit az $\begin{cases} x - y = -4 \\ y = 2x \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása adja.		1 pont
Az első egyenletbe $y = 2x$ -et helyettesítve $x - 2x = -4$,		1 pont
amiből $x = 4$,		1 pont
illetve $y = 8$.		1 pont
A C pont koordinátái: $C(4; 8)$.		1 pont
Az AC átló O felezőpontja: $O(2; 4)$.		1 pont*
Az O pont az BD szakasz felezőpontja is, ezért ha $B(b_1; b_2)$, akkor $\frac{b_1 + (-2)}{2} = 2, \text{ és } \frac{b_2 + 2}{2} = 4,$ amiből $b_1 = 6, b_2 = 6$, és $B(6; 6)$.		1 pont*
Összesen:		10 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző akkor is megkaphatja, ha a B csúcs koordinátáit közvetlenül így számolja: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$, amiből $B(6; 6)$ adódik.

Második megoldás

Jelölje a téglalap B csúcsának koordinátáit $B(b_1; b_2)$. Ekkor $\overrightarrow{AB}(b_1; b_2)$ és $\overrightarrow{AD}(-2; 2)$.	1 pont
A fenti vektorok merőlegesek egymásra, ezért skaláris szorzatuk 0, amiből következik, hogy $-2b_1 + 2b_2 = 0,$ $b_1 = b_2.$	2 pont
Mivel a C csúcs illeszkedik az $y = 2x$ egyenletű egyenesre, ezért ez az egyenes egyben a téglalap átlóegyenesre is. Ebből következik, hogy a BD szakasz felezőpontja is illeszkedik az egyenesre.	1 pont
A BD szakasz O felezőpontjára: $O\left(\frac{b_1-2}{2}; \frac{b_2+2}{2}\right)$, és így $\frac{b_2+2}{2} = 2 \cdot \frac{b_1-2}{2},$ $b_2 = 2b_1 - 6.$	2 pont
Mivel $b_1 = b_2$ is teljesül, ezért $b_2 = 2b_2 - 6,$ amiből $b_2 = 6$,	1 pont
és $B(6; 6)$.	1 pont
Az átlók O felezőpontja: $O(2; 4)$.	1 pont
Az O pont az AC szakasz felezőpontja is, ezért ha $C(c_1; c_2)$, akkor $\frac{c_1+0}{2} = 2, \text{ és } \frac{c_2+0}{2} = 4,$ amiből $c_1 = 4$, $c_2 = 8$, és $C(4; 8)$.	1 pont
Összesen:	10 pont

5. *Kolos széjfét egy kilenc számjegyből álló számsor nyitja. A széfet nyitó kódot nem ismerjük, de azt tudjuk, hogy az alábbi feltételek közül mindkettőt teljesíti:*

- *a számjegyek közt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike egyszer fordul elő,*
- *a kódban az 1-es szám valahol az 5-ös számjegy előtti, a 9-es szám valahol az 5-ös számjegy utáni részben szerepel.*

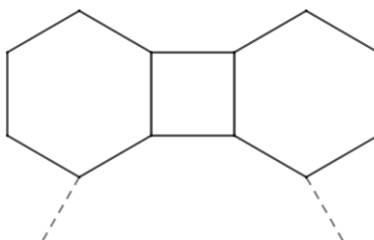
Hány próbálkozás szükséges ahhoz, hogy a széfet biztosan ki tudjuk nyitni?

A széfet nyitó kódokat az 5-ös szám helye szerint számoljuk össze.	1 pont
Az 5-ös szám nem állhat az első, és a kilencedik helyen.	1 pont
Ha az 5 a második helyen áll, akkor az 1-es az 1. helyen szerepel, a 9-es helyét pedig 7-féleképp választhatjuk (3. és 9. hely között bárhol lehet).	1 pont
A maradék számjegyeket $6! = 720$ -féleképp rakhatjuk le, ezért az esetek száma $1 \cdot 7 \cdot 720 = 5040$.	2 pont*
Ha az 5 a harmadik helyen áll, akkor az 1-es helyét 2-féleképp, a 9-es helyét 6-féleképp, a többi számjegy helyét 720-féleképp választhatjuk, az esetek száma tehát $2 \cdot 6 \cdot 720 = 8640$.	1 pont*

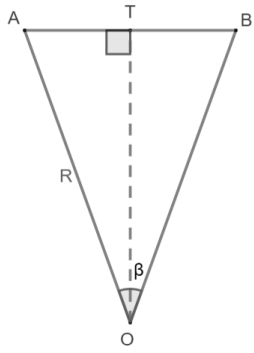
Hasonló gondolatmenet mutatja, hogy ha az 5-ös szám a k -adik helyen áll ($2 \leq k \leq 8$), akkor az 1-es helyét $(k - 1)$ -féleképp, a 9-es szám helyét pedig $(9 - k)$ -féleképp választhatjuk meg, ezért ezeket a számjegyeket összesen $(k - 1) \cdot (9 - k)$ -féleképp rakhatjuk be a kódba. A maradék számokat minden esetben 720-féleképp rakhatjuk sorba.	2 pont
A lehetséges kódok száma ezért $720 \cdot (1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1) = 60480,$ ennyi próbálkozás szükséges Kolosnak ahhoz, hogy a széfet biztosan kinyissa.	2 pont
Összesen:	10 pont

*Megjegyzés: Ha a versenyző számításai során nem veszi figyelembe az 1-es, 5-ös, 9-es számok sorrendjét, akkor a *-gal megjelölt pontokat nem kaphatja meg.*

6. Szabályos sokszögekből többféleképp is alkothatunk az egész sík kitöltésére alkalmas parkettákat. Ezek közös tulajdonsága, hogy a szomszédos sokszögek teljes oldalukkal érintkeznek, továbbá köztük sem átfedés, sem hézag nem alakulhat ki. Ilyen síkkitöltés például a négyzetrács. Az alábbi parkettarészlet úgy keletkezett, hogy egy ismeretlen oldalszámú, 1 egység oldalhosszúságú szabályos sokszög oldalaihoz felváltva négyzeteket és szabályos hatszögeket illesztettünk. Lefedhető-e az ismeretlen oldalszámú sokszög egy 2 egység sugarú körrel?



Jelölje az ismeretlen oldalszámú szabályos sokszög belső szögét α . A parketta csúcspontjaiban ekkor $\alpha + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ,$ amiből $\alpha = 150^\circ$.	2 pont
Ha a szabályos sokszög oldalainak számát n jelöli, akkor egy belső szögére $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} = 150^\circ,$ aminek megoldása $n = 12$. Az ismeretlen oldalszámú szabályos sokszögnek 12 oldala van.	2 pont
A szabályos sokszöget lefedő körök közül a sokszög köré írható körnek a legkisebb a sugara, ezért kiszámoljuk a 12-szög köré írható kör sugarát.	1 pont
Jelöljük O -val a parkettában szereplő szabályos sokszög köré írható kör középpontját, A -val és B -vel egyik oldalának két végpontját, T -vel az AB szakasz felezőpontját. Ekkor az ATO háromszög derékszögű, és AO a sokszög köré írható kör sugara, melyet az ábrán R jelöl.	1 pont

	
Ha az $AOB\angle$ -et β jelöli, akkor $\beta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.	1 pont
Az AOT derékszögű háromszögben $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{AT}{R},$ amiből $R = \frac{AT}{\sin 15^\circ} = \frac{0,5}{\sin 15^\circ} \approx 1,9319.$	2 pont*
Mivel $R < 2$, ezért a szabályos 12-szög lefedhető egy 2 egység sugarú körrel.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt részt természetesen közelítő értékek használata nélkül is megkaphatjuk. Addíciós összefüggések segítségével kapjuk, hogy

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

amiből

$$R = \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$