

Megyei matematikaverseny

11. osztályosok versenye

2010. november

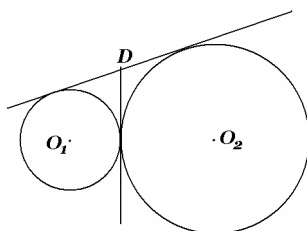
1. Az a pozitív valós számra $a^2 + \frac{1}{a^2} = 5$. Mennyi $a + \frac{1}{a}$ és $a^3 + \frac{1}{a^3}$ értéke? (10 pont)

2. Oldja meg az $|x-1| \cdot |x+2| \cdot |x-3| = |x+1| \cdot |x-2| \cdot |x+3|$ egyenletet a valós számok körében!
($|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$) (10 pont)

3. Az O_1 középpontú 8 egység sugarú és az O_2 középpontú 10 egység sugarú körök kívülről érintik egymást. A körök közös belső érintője és az egyik külső érintőjük metszéspontja D .

a) Mutassa meg, hogy az O_1O_2D háromszög derékszögű!

b) Mekkora az O_1D távolság? (20 pont)



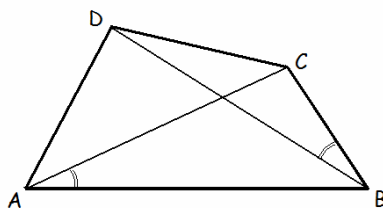
4. Egy háromjegyű szám számjegyeiből képezzük az összes különböző kétjegyű számot és számoljuk ki ezek összegét. (Például 137 esetén a $11 + 33 + 77 + 13 + 31 + 17 + 71 + 37 + 73$ összeget számoljuk.) Határozza meg az összes olyan háromjegyű számot, melyeknél ez az összeg megegyezik a vizsgált háromjegyű számmal. (10 pont)

5. Legyen $a_1 = 1848$, $a_2 = 1956$, és $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

a) Mutassa meg, hogy a sorozat periodikus. b) Mennyi a_{2011} értéke? (15 pont)

6. Az $ABCD$ négyszögben $\angle DAB = \angle ABC = 60^\circ$, és $\angle CAB = \angle DBC$. Mutassa meg, hogy $AD + BC = AB$.

(15 pont)



7. Melyek azok a p és q prímszámok, melyekre $p + q = (p - q)^3$? (20 pont)

