Megyei matematikaverseny

11. osztályosok versenye

2012. november

1. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} xy + yz &= 8 \\ yz + zx &= 9 \\ zx + xy &= 5 \end{aligned}\right\}$$

(***10 pont***)

2. Az $x^2 + px + q = 0$ egyenletben az együtthatók, p és q prímszámok, és az egyenlet gyökei egész számok. Határozza meg p és q lehetséges (pozitív) értékeit. (***10 pont***)

3. Az *ABCD* paralelogramma *A* és *D* csúcsából induló szögfelezői a *BC* oldalt három egyenlő részre osztják. Mekkorák a paralelogramma oldalai, ha a kerülete 40 egység? (***11 pont***)

4. Mekkora az $y = \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$ kifejezés legkisebb, illetve legnagyobb értéke? (***14 pont***)

5. Derékszögű háromszög befogóinak aránya 3:4, a derékszög szögfelezőjének hossza $24\sqrt{2}$ egység. Mekkora a háromszög kerülete? (***17 pont***)

6. A *H* halmaz a következő tulajdonságú: $2 \in H$, ha $n \in H$, akkor $n + 5$ is, és $3n$ is eleme *H*-nak. Melyik az a 2012-nél nem nagyobb legnagyobb szám, amely nem tartozik *H*-ba?

(***18 pont***)

7. Az *x, y* pozitív egészekre $x(x+1) \mid y(y+1)$ és x nem osztója y-nak, nem osztója $(y+1)$-nek; továbbá $(x+1)$ nem osztója y-nak, és nem osztója $(y+1)$-nek. Van-e ilyen tulajdonságú $(x;\ y)$ számpár? Ha van ilyen számpár, keresse meg azt, amelyre $x + y$ értéke a legkisebb.

(***20 pont***)

Megyei matematikaverseny

12. osztályosok versenye

2012. november

1. Hány megoldása lehet az egész számok körében x-re az $|x^2-10|=k$ egyenletnek, ha a k paraméter egész számot jelöl?

(***10 pont***)

2. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\lg x-\lg y=1\\ \lg^2 x+\lg^2 y=5\end{aligned}\right\}$$

(***10 pont***)

3. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O, beírt körének középpontja K. Ha $AOC\angle=60°$, akkor mekkora $AKC\angle$?

(***16 pont***)

4. Mekkora az $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ kifejezés legkisebb, illetve legnagyobb értéke?

(***16 pont***)

5. Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogóira kifelé építettük az $ACFG$ és $BCDE$ négyzeteket, és $BC=2\cdot AC$. Az AE és a BG szakaszok a befogókat a K és H pontokban metszik. Mekkora a $CKH\angle$?

(***14 pont***)

6. Jelölje $V(n)$ az n szám egyjegyű pozitív osztóinak számát. Például $V(100)=4$, mivel a 100-nak 4 egyjegyű osztója van: 1, 2, 4 és 5. Mennyi $V(1)+V(2)+V(3)+\ldots+V(99)+V(100)$ értéke?

(***16 pont***)

7. Az $y=x^2+4$ és $y=-x^2+2x$ paraboláknak van két közös érintőjük. Bizonyítsa be, hogy a parabolákon levő négy érintési pont egy paralelogramma csúcsait alkotja.

(***18 pont***)