Javítási útmutató
11. osztály, gimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! ***(10 pont)***

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2$$

Megoldás. Legyen $a=\sqrt{x^2+1}$ és $b=\sqrt{x^2-3}$. ***2 pont***

Az eredeti egyenlet alapján $a+b=2$. ***1 pont***

$a^2=x^2+1$, $b^2=x^2-3$.

Ezért $a^2-b^2=4$. ***2 pont***

Tehát az egyenletrendszerünk így írható:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a^2-b^2=4 \end{cases}$$

A második egyenletnél végezzük el a $b=2-a$ helyettesítést: $a^2-(2-a)^2=4$. ***2 pont***

Innen $a^2-(4-4a+a^2)=4$, azaz $a=2$. ***1 pont***

Mivel $a=\sqrt{x^2+1}=2$, így $x^2=3$, $x=\pm\sqrt{3}$. Ellenőrzés mutatja, hogy ezek megoldások. ***2 pont***

Megjegyzés. A feladat 2008. májusában az emelt szintű érettségi 2. feladata volt. A javítókulcs 4, ettől eltérő megoldást mutat be.

2. Milyen természetes számot jelölhet *x*, ha $(x^2-5x)^2-34$ értéke (pozitív) prímszám? ***(14 pont)***

Megoldás. Mivel x^2-5x értéke páros és páratlan x esetén is páros, ezért $(x^2-5x)^2-34$ minden *x* természetes számra páros, csak úgy lesz prím, ha 2 az értéke. ***4 pont***

$(x^2-5x)^2-34=2, (x^2-5x)^2=36$. ***2 pont***

Tehát $x^2-5x=\pm 6$. ***2 pont***

Ha $x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$, azaz $x=-1$, vagy $x=6$. ***2 pont***

Ha $x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$, azaz $x=2$, vagy $x=3$. ***2 pont***

A természetes számok között 3 olyan szám van, $x=2,3,6$, melyekre az $(x^2-5x)^2-34$ kifejezés értéke pozitív prímszám. ***2 pont***

3. Mennyi az értéke? ***(2+2+3+4+4=15 pont)***

(A) Ha $17x + 51y = 85$, akkor mennyi $19x + 57y$ értéke?
(B) Az $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ egyenlet két gyöke 2 és 3. Mennyi $b - a$ értéke?
(C) Ha $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 = 0$, akkor mennyi $x^2 + x + 1$ értéke?
(D) Melyik az a legnagyobb *n* egész, amelyre $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \frac{1}{10}$ teljesül?
(E) Az *a, b, c, d* valós számokra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ teljesül. Mennyi lehet $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$ értéke?

Megoldás. (A) Ha $17x + 51y = 85$, akkor $x + 3y = 5$, innen $19x + 57y = 95$. ***2 pont***
Megjegyzés. A válasz közelébe juthatunk, ha találunk olyan *x* és *y* értéket, amelyre teljesül a megadott $17x + 51y = 85$ egyenlőség. Egy ilyen megoldás $x = 2, y = 1$.
Ezeket az értékeket helyettesítsük be: $19x + 57y = 19 \cdot 2 + 57 \cdot 1 = 95$.
Most azt tudjuk, hogy $19x + 57y$ értéke lehet 95.
Azt ebből még nem tudjuk, hogy lehet-e más az értéke.

(B) Helyettesítsük az $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ egyenletbe a 2 és a 3 számokat.
$x = 2$ esetén $8 + 4a + 2b + 6 = 0$.
$x = 3$ esetén $27 + 9a + 3b + 6 = 0$.
Az első egyenlőség kétszereséből vonjuk ki a második egyenlőséget: $-11 - a + b + 6 = 0$, azaz $b - a = 5$. ***2 pont***

(C) Kiszámolhatnánk *x* értékét … azonban van egyszerűbb út.
Szorozzuk az egyenlőséget x^2-tel: $1 - x - x^2 = 0$.
Innen $1 = x^2 + x$, azaz $x^2 + x + 1 = 2$. ***3 pont***

(D) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{1}{10}$, tehát $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 10$.
$\sqrt{24} + \sqrt{25} < 5 + 5 = 10$, míg $\sqrt{25} + \sqrt{26} > 5 + 5 = 10$, tehát $n = 24$. ***4 pont***

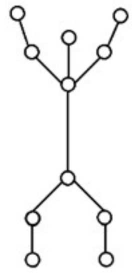
(E) Ha $k = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$, akkor $a = bk$, $b = ck$, $c = dk$ és $d = ak$.
Ezeket összeszorozva $abcd = abcd \cdot k^4$.
Mivel $abcd \neq 0$, így $k^4 = 1$, azaz $k = 1$ vagy $k = -1$.

Ha $k = 1$, akkor $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = \frac{a+a+a+a}{a+a+a-a} = \frac{4a}{2a} = 2$.

Ha $k = -1$, akkor $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = \frac{a-a+a-a}{a-a+a+a} = \frac{0}{2a} = 0$. ***4 pont***

A pontozásról. A helyes válaszok ***1-1 pontot*** érnek. Az (E) feladatnál ezekkel ***1+1=2 pontot*** lehet szerezni. A teljes pontszámot helyes levezetés, indoklás esetén adjuk meg.

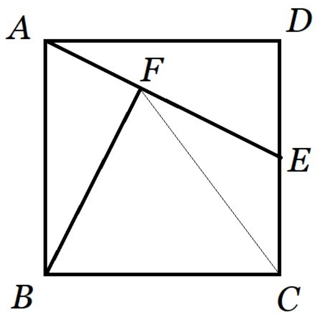
4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 számokat úgy írja be a körökbe, hogy a szakasszal összekötött körök közül a magasabban lévőbe nagyobb szám kerüljön. Hány különböző kitöltés lehetséges? ***(14 pont)***



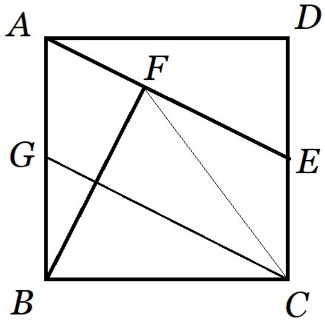
Megoldás. A felső 5 körbe kerül az öt legnagyobb szám: 11, 10, 9, 8 és 7. ***2 pont***
Középen a függőleges egyenesen a második és harmadik körbe kerül a 6 és 5. ***2 pont***

Lent a két függőleges vonalra írjuk fel az 1, 2, 3, 4 számokat. ***2 pont***
A 11, 10, 9, 8, 7 számokból kiválasztunk kettőt, ezeket nagyság szerinti sorrendben beírjuk a bal szélen lévő két körbe, majd választunk kettőt a jobb szélső körpárba. Ezeknek a kitöltéseknek a száma $\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 3=30$. ***4 pont***
Az 1, 2, 3, 4 számokat $\frac{4\cdot 3}{2}=6$-féleképp helyezhetjük el, hiszen kiválasztunk a négy számból kettőt, őket beírjuk a bal szélen lévő ágba, és a megmaradt két számot a jobb szélső körökbe. ***2 pont***
A lehetséges kitöltések száma $30\cdot 6=180$. ***2 pont***

5. Az *ABCD* négyzet *CD* oldalának felezőpontja *E*. A *B* csúcsból az *AE* szakaszra bocsátott merőleges talppontja *F*. Bizonyítsa be, hogy $CF=CD$. ***(14 pont)***

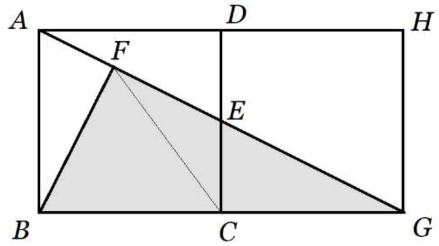


1. megoldás. Húzzunk párhuzamost a *C* ponton át *AE*-vel, kössük össze *C*-t az *AB* oldal *G* felezőpontjával. Mivel $BF\perp AE$ és $CG\parallel AE$, ezért $BF\perp CG$, továbbá *CG* felezi a *BF* szakaszt. Tehát a *BCF* háromszögnek *CG* szimmetriatengelye.



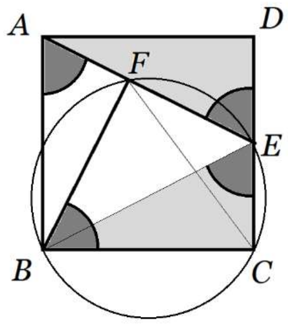
Ezért $CF=CB$ és $CB=CD$, így $CF=CD$.

2. megoldás. Az *ABCD* négyzet mellett az ábra szerint megrajzoljuk a *CDHG* négyzetet. Az *AE* egyenes azonos az *ABGH* téglalap *AG* átlóegyenesével. A *BGF* derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonala fele az átfogónak (gondoljunk pl. a derékszögű háromszög köré írható Thalész-körre).



$$CF = \frac{1}{2}BG = BC = CD.$$

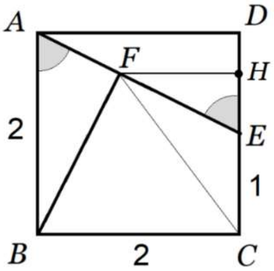
3. megoldás. A befestett két háromszög egybevágó, a négy megjelölt szög egyenlő.
A *BCEF* négyszögben az *F* és *C* csúcsnál derékszög van, így a négyszög húrnégyszög.



A körben az *FC* és a *BC* húrokhoz ugyanakkora kerületi szögek tartoznak, ezért $FC = BC$.

Mivel a négyzet oldalai egyenlők, $BC = CD$, így $CF = CD$.

4. megoldás. Legyen $AB = CD = 2$, és számoljuk ki a *CF* hosszúságot. Ehhez szükségünk lesz a *CHF* derékszögű háromszög befogóira.



A megjelölt két szög egyenlő, az *EDA*, *AFB*, *EHF* háromszögek hasonlók. Az *EDA* háromszögben a két befogó aránya 1: 2.

Ha $x = AF$, akkor $FB = 2x$, és $x^2 + (2x)^2 = 2^2$. Innen $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Az *EDA* háromszög átfogója $AE = \sqrt{5}$.

$EF = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Az *EHF* háromszögben a befogók a hasonlóság miatt az *EF* átfogónak $\frac{1}{\sqrt{5}}$, illetve $\frac{2}{\sqrt{5}}$-szörösei.

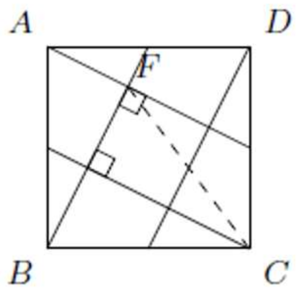
$EH = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, és az *FH* ennek a kétszerese, azaz $FH = \frac{6}{5}$.

Felírhatjuk a Pitagorasz-tételt a *CHF* háromszögben:

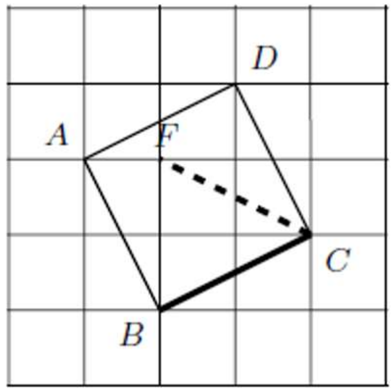
$\left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = CF^2$, azaz $CF^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{64+36}{25} = \frac{100}{25} = 4$, vagyis $CF = 2$.

Tehát $CF = CD$.

5. megoldás. Az *ABCD* négyzetet az ábra szerint helyezzük bele egy négyzetrácsba.



$\Longrightarrow$



A *CF* szakasz a négyzetrács 1 × 2-es téglalapjának az átlója, ahogyan *CD* is.

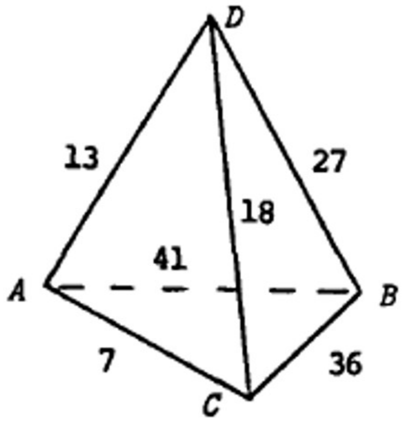
A pontozáshoz. Részmegoldásnál pontozhatjuk a jó ötleteket, illetve vonjunk le pontokat a következtetés hiányosságaiért.

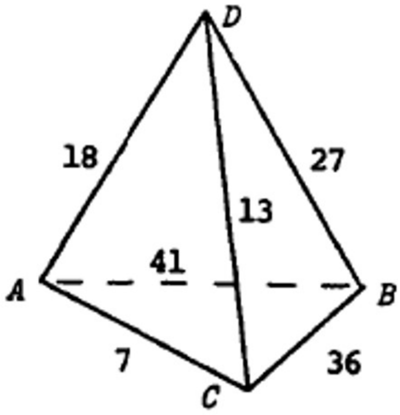
6. Öt pozitív egész szám átlaga 11, mediánja 10, a módusza 7. Mekkora a minta legnagyobb terjedelme? ***(14 pont)***

Megoldás. A medián 10, a módusz 7, így az első három szám 7, 7, 10. ***2 pont***
Az öt szám összege $5 \cdot 11 = 55$. ***2 pont***
Az utolsó két szám összege $55 - (7 + 7 + 10) = 31$. ***2 pont***
Ez a két szám különböző és nagyobb 10-nél.
Tehát $a + b = 31$ és $10 < a < b$. ***2 pont***
Akkor legnagyobb *b*, ha *a* a legkisebb, $a = 11$ és ekkor $b = 20$. ***2 pont***
Az öt szám: 7, 7, 10, 11, 20. ***2 pont***
A minta terjedelme $20 - 7 = 13$. ***2 pont***

7. Az *ABCD* tetraéder éleinek hossza 7, 13, 18, 27, 36 és 41. Ha az *AB* él hossza 41, akkor milyen hosszú lehet a *CD* él? ***(19 pont)***

Megoldás. Figyeljük a háromszög-egyenlőtlenség teljesülését. ***2 pont***
Minden élhez két oldallap csatlakozik. ***2 pont***
A 7 hosszú él a megadott hosszúságokkal csak két esetben alkot háromszöget $(7, 13, 18)$ és $(7, 36, 41)$. ***5 pont***





Az élek elhelyezésére két lehetőség van. Legyen az alaplap rögzítve: $(7, 36, 41)$, ehhez a $(7, 13, 18)$ lap kétféleképp illeszthető, ahogyan az ábrán látjuk. ***4 pont***

$AB = 41$ és $CD = 18$ vagy $CD = 13$. Az első eset nem valósul meg, mert $ABD = (13, 27, 41)$, ám ilyen oldalakkal nem szerkeszthető háromszög. ***4 pont***

Így egyetlen megoldás van, $CD = 13$. ***2 pont***