Javítási útmutató
11. osztály, technikum

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Egy téglatest testátlójának hossza 7 cm, felszíne 72 cm^2. Hány *cm* az éleinek összege?

(10 pont)

Megoldás. Legyen a téglatest három egy csúcsból induló élének hossza *a, b* és *c*. Ekkor

$$\begin{cases} 2(ab+bc+ca)=72 \\ a^2+b^2+c^2=49 \end{cases}$$

4 pont

Nem lehet kiszámolni a két egyenletből az élek hosszát, de kiszámolhatjuk az élek összegét. Adjuk össze a két egyenletet: $(a^2+b^2+c^2)+(2ab+2bc+2ca)=49+72=121$, azaz $(a+b+c)^2=121$. ***4 pont***

Ezért $a+b+c=11$. A téglatest három egy csúcsból induló élének összege 11. ***2 pont***
Például $a=6\ cm, b=3\ cm, c=2\ cm$ megfelelő élhármas.

2. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok körében. ***(12 pont)***

$$\left.\begin{aligned} x-y&=6 \\ x^3-y^3&=126 \end{aligned}\right\}$$

1. megoldás. $y=x-6$, így $x^3-(x-6)^3=126$. ***2 pont***
Innen $x^3-(x^3-18x^2+108x-216)=126$, azaz $x^2-6x+5=0$. ***2 pont***
$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)=0$. ***2 pont***
Ha $x=1$, akkor $y=-5$. ***2 pont***
Ha $x=5$, akkor $y=-1$. ***2 pont***
Ellenőrzés mutatja, hogy az egyenletrendszerbe (x,y) helyére az $(1,-5)$ és $(5,-1)$ számokat írva megoldásokat kapunk. ***2 pont***

2. megoldás. $126=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)((x-y)^2+3xy)$. ***2 pont***
Ezért $126=6\cdot(6^2+3xy)$. ***1 pont***
Azaz $xy=-5$. ***1 pont***

$$\left.\begin{aligned} x-y&=6 \\ xy&=-5 \end{aligned}\right\}$$

$x=y+6$, $y^2+6y+5=0$, $(y+1)(y+5)=0$. ***2 pont***
Ha $y=-1$, akkor $x=5$. ***2 pont***
Ha $y=-5$, akkor $x=1$. ***2 pont***
Az ellenőrzés megmutatja, hogy az egyenletrendszerbe (x,y) helyére az $(1,-5)$ és $(5,-1)$ számokat írva valóban megoldásokat kapunk. ***2 pont***

3. Mennyi az értéke? ***(3+3+4+4+4=18 pont)***

(A) Ha $17x + 51y = 85$, akkor mennyi $19x + 57y$ értéke?
(B) Az $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ egyenlet két gyöke 2 és 3. Mennyi $b - a$ értéke?
(C) Ha $\frac{x}{y-1} = \frac{y}{x-3} = 3$, akkor mennyi $x + y$ értéke?
(D) Ha $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 = 0$, akkor mennyi $x^2 + x + 1$ értéke?
(E) Az *a, b, c, d* valós számokra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ teljesül. Mennyi lehet $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$ értéke?

Megoldás. (A) Ha $17x + 51y = 85$, akkor $x + 3y = 5$, innen $19x + 57y = 95$. ***3 pont***
Megjegyzés. A válasz közelébe juthatunk, ha találunk olyan *x* és *y* értéket, amelyre teljesül a megadott $17x + 51y = 85$ egyenlőség. Egy ilyen megoldás $x = 2, y = 1$.
Ezeket az értékeket helyettesítsük be: $19x + 57y = 19 \cdot 2 + 57 \cdot 1 = 95$.
Most azt tudjuk, hogy $19x + 57y$ értéke lehet 95.
Azt ebből még nem tudjuk, hogy lehet-e más az értéke.

(B) Helyettesítsük az $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ egyenletbe a 2 és a 3 számokat.
$x = 2$ esetén $8 + 4a + 2b + 6 = 0$.
$x = 3$ esetén $27 + 9a + 3b + 6 = 0$.
Az első egyenlőség kétszereséből vonjuk ki a második egyenlőséget: $-11 - a + b + 6 = 0$, azaz $b - a = 5$. ***3 pont***

(C) Ha $\frac{x}{y-1} = 3$, akkor $x = 3(y-1) = 3y - 3$.
$\frac{y}{x-3} = 3$, akkor $y = 3(x-3) = 3x - 9$.
Ezeket adjuk össze: $x + y = 3(x + y) - 12$, tehát $2(x + y) = 12$, azaz $x + y = 6$. ***4 pont***

(D) Kiszámolhatnánk *x* értékét … azonban van egyszerűbb út.
Szorozzuk az egyenlőséget x^2-tel: $1 - x - x^2 = 0$.
Innen $1 = x^2 + x$, azaz $x^2 + x + 1 = 2$. ***4 pont***

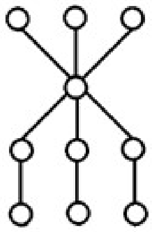
(E) Ha $k = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$, akkor $a = bk$, $b = ck$, $c = dk$ és $d = ak$.
Ezeket összeszorozva $abcd = abcd \cdot k^4$.
Mivel $abcd \neq 0$, így $k^4 = 1$, azaz $k = 1$ vagy $k = -1$.

Ha $k = 1$, akkor $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = \frac{a+a+a+a}{a+a+a-a} = \frac{4a}{2a} = 2$.

Ha $k = -1$, akkor $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = \frac{a-a+a-a}{a-a+a+a} = \frac{0}{2a} = 0$. ***4 pont***

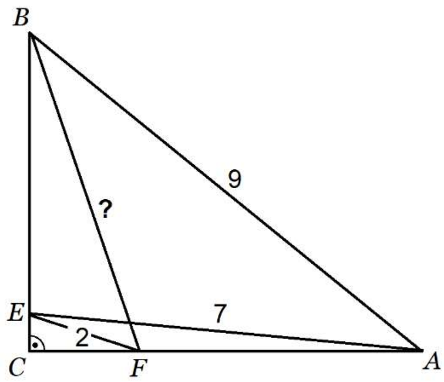
A pontozásról. A helyes válaszok ***1-1 pontot*** érnek. Az (E) feladatnál ezekkel ***1+1=2 pontot*** lehet szerezni. A teljes pontszámot helyes levezetés, indoklás esetén adjuk meg.

4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat úgy írja be a körökbe, hogy a szakasszal összekötött körök közül a magasabban lévőbe nagyobb szám kerüljön. Hány különböző kitöltés lehetséges? ***(15 pont)***



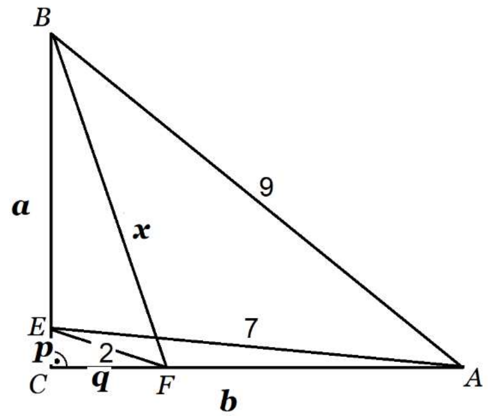
Megoldás. Az első sorba csak a 8, 9, 10 kerülhet, $3! = 6$-féle sorrendben. ***3 pont***
A 7 csak a második sorba kerülhet. ***4 pont***
Ezután a három egymás alatti számpárt úgy írom be, hogy a megmaradó 6 számból választok kettőt, őket nagyság szerinti sorrendben beírom az első ágba. Ez 15 lehetőség. ***3 pont***
Majd a megmaradt 4 számból választok kettőt (ez 6 lehetőség), őket a középső ágon helyezem el, végül beírom a megmaradt két számot a megfelelő sorrendben. ***3 pont***
A kitöltések száma $6 \cdot 15 \cdot 6 = 540$. ***2 pont***

5. Az ABC derékszögű háromszög befogóin az ábra szerint felvettük az E és F pontokat. A háromszög átfogója $AB = 9$, továbbá $EA = 7$ és $EF = 2$.



Mekkora a BF szakasz? ***(16 pont)***

Megoldás. Legyen $CB = a$, $CA = b$, $CE = p$, $CF = q$ és $BF = x$.



Írjuk fel a Pitagorasz-tételeket az *ABC, ECF, ACE, BCF* derékszögű háromszögekben:

$$a^2 + b^2 = 9^2$$
$$p^2 + q^2 = 2^2$$
$$b^2 + p^2 = 7^2$$
$$a^2 + q^2 = x^2$$

2+2+2+2 = 8 pont

Az első két egyenlet összegéből vegyük el a harmadik egyenletet

$$(a^2 + b^2) + (p^2 + q^2) - (b^2 + p^2) = 9^2 + 2^2 - 7^2$$

$$a^2 + q^2 = 36$$

Tehát $x^2 = 36$. ***6 pont***

$x = 6$. ***2 pont***

6. Négy szám átlaga, mediánja és terjedelme ugyanaz a szám. A négy szám közül a legkisebb 17. Mekkora a legnagyobb szám? ***(10 pont)***

Megoldás. Legyen az átlag x, ezért a négy szám összege $4x$. ***2 pont***

A medián is x, így a két középső szám (a második és harmadik) összege $2x$. ***2 pont***

A legkisebb szám 17, emiatt a legnagyobb $17 + x$, mert a terjedelem x. ***2 pont***

Ezek után a négy szám összege $17 + 2x + (17 + x) = 4x$, innen $x = 34$. ***2 pont***

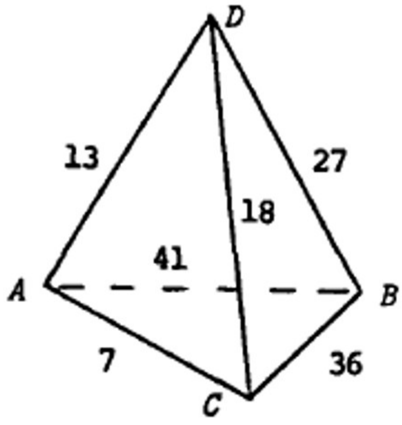
A legnagyobb szám $17 + 34 = 51$. ***2 pont***

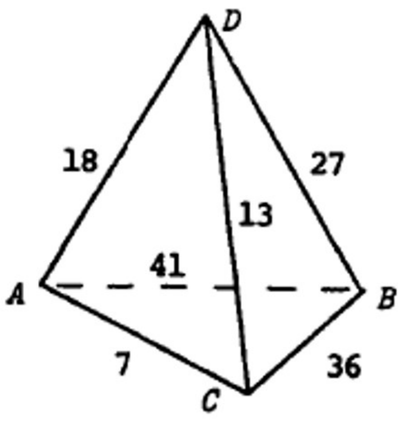
7. Az $ABCD$ tetraéder éleinek hossza 7, 13, 18, 27, 36 és 41. Ha az AB él hossza 41, akkor milyen hosszú lehet a CD él? ***(19 pont)***

Megoldás. Figyeljük a háromszög-egyenlőtlenség teljesülését. ***2 pont***

Minden élhez két oldallap csatlakozik. ***2 pont***

A 7 hosszú él a megadott hosszúságokkal csak két esetben alkot háromszöget $(7, 13, 18)$ és $(7, 36, 41)$. ***5 pont***





Az élek elhelyezésére két lehetőség van. Legyen az alaplap rögzítve: $(7, 36, 41)$, ehhez a $(7, 13, 18)$ lap kétféleképp illeszthető, ahogyan az ábrán látjuk. ***4 pont***

$AB = 41$ és $CD = 18$ vagy $CD = 13$. Az első eset nem valósul meg, mert $ABD = (13, 27, 41)$, ám ilyen oldalakkal nem szerkeszthető háromszög. ***4 pont***

Így egyetlen megoldás van, $CD = 13$. ***2 pont***