12. osztály, gimnázium

1. Az n olyan természetes szám, melyre a $2n$ számnak 8 pozitív osztója van. Hány pozitív osztója lehet a $3n$ számnak? ***(10 pont)***

2. Mennyi az értéke? ***(17 pont)***

(A) Az *x, y, z* valós számokra $x + y + z = 3$ és $x + 2y + 3z = 7$. Mennyi $x + 3y + 5z$ értéke?

(B) Ha $a + \frac{1}{a} = \sqrt{13}$, akkor mennyi $\left|a - \frac{1}{a}\right|$ értéke?

(C) Ha $2^a = 3$ és $3^b = 4$, akkor mennyi 4^{ab} értéke?

(D) Mennyi az $(x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2$ kifejezés legkisebb értéke?

(E) Jelölje $[x]$ a legnagyobb olyan egész számot, amely nem nagyobb *x*-nél. Mennyi *n* értéke, ha a $[\sqrt{1}]$, $[\sqrt{2}]$, $[\sqrt{3}]$, …, $[\sqrt{n}]$ számok összege $2n$?

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy írja be a körökbe, hogy a szakasszal összekötött körök közül a magasabban lévőbe nagyobb szám kerüljön. Hány különböző kitöltés lehetséges?

(10 pont)

4. Oldja meg a $(\log_3 x) \cdot \log_4 \frac{x}{3} = \log_2 3$ egyenletet. ***(11 pont)***

5. Egy háromszög két oldalának hossza 3 és 7 egység, és a szögei számtani sorozatot alkotnak. Mekkora a háromszög harmadik oldala? ***(14 pont)***

6. Egy szobában 20-an vannak, lovagok és lókötők. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők minden állítása hamis. Mindenki egy állítást mond, vagy ezt: „Legalább öt tőlem alacsonyabb lókötő van a szobában”; vagy pedig ezt: „Legalább öt tőlem magasabb lókötő van a szobában.” Hány lókötő lehet a szobában, ha nincs két azonos magasságú közöttük? ***(18 pont)***

7. Egy tetraédernek mind a hat éle egész hosszúságú. Öt élének hossza 14, 20, 40, 52 és 70. Mekkora lehet a hatodik él? ***(20 pont)***