Javítási útmutató
12. osztály, gimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Az n olyan természetes szám, melyre a $2n$ számnak 8 pozitív osztója van. Hány pozitív osztója lehet a $3n$ számnak? ***(10 pont)***

Megoldás. Milyen szám lehet $2n$, ha 8 osztója van?
$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, azaz $8 = 7 + 1 = (3 + 1)(1 + 1) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$, emiatt $2n$ prímtényezős alakja: $2n = p^7$, vagy $2n = p^3 \cdot q$, vagy $2n = p \cdot q \cdot r$. ***2 pont***

Ha $2n = p^7$, akkor $p = 2$, $n = 2^6$, és a $3n = 3 \cdot 2^6$ számnak $2 \cdot 7 = 14$ osztója van. ***2 pont***

Ha $2n = p^3 \cdot q$, akkor $2n = 2^3 \cdot q$ vagy $2n = 2 \cdot p^3$, azaz $n = 2^2 \cdot q$ vagy $n = p^3$. A $3n$ szám lehet $3n = 3 \cdot 2^2 \cdot q$, vagy $3n = 2^2 \cdot 3^2$, vagy $3n = 3^4$. Ezen számoknak 12, 9, illetve 5 osztója van. ***2 pont***

Ha $2n = p \cdot q \cdot r$, akkor $n = p \cdot q$. Most $3n = 3 \cdot p \cdot q$ vagy $3n = 3^2 \cdot q$. Ezeknek a számoknak 8, illetve 6 osztója van. ***2 pont***

Tehát a $3n$ szám osztóinak száma 5, 6, 8, 9, 12 vagy 14 lehet. ***2 pont***

2. Mennyi az értéke? ***(3+3+3+3+5 = 17 pont)***

(A) Az *x, y, z* valós számokra $x + y + z = 3$ és $x + 2y + 3z = 7$. Mennyi $x + 3y + 5z$ értéke?
(B) Ha $a + \frac{1}{a} = \sqrt{13}$, akkor mennyi $\left|a - \frac{1}{a}\right|$ értéke?
(C) Ha $2^a = 3$ és $3^b = 4$, akkor mennyi 4^{ab} értéke?
(D) Mennyi az $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2$ kifejezés legkisebb értéke?
(E) Jelölje $[x]$ a legnagyobb olyan egész számot, amely nem nagyobb *x*-nél. Mennyi *n* értéke, ha a $[\sqrt{1}]$, $[\sqrt{2}]$, $[\sqrt{3}]$, …, $[\sqrt{n}]$ számok összege $2n$?

Megoldás. (A) $x + y + z = 3$, $x + 2y + 3z = 7$, $x + 3y + 5z$ számtani sorozatot alkot, azaz 3, 7, $x + 3y + 5z$ számtani sorozat, így $x + 3y + 5z = 11$.
Másképp számolva: $x + 3y + 5z = 2 \cdot (x + 2y + 3z) - (x + y + z) = 11$.

(B) Az $a + \frac{1}{a} = \sqrt{13}$ egyenlőségből egy másodfokú egyenlet adódik, innen számolhatjuk *a* lehetséges értékeit, és abból $\left|a - \frac{1}{a}\right|$ értékét.
Elkerülhetjük a másodfokú egyenlet megoldását, és az azt követő számolásokat.

Gondoljunk arra, hogy $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2+\frac{1}{a^2}+2$ és $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = a^2+\frac{1}{a^2}-2$, ezért a különbségük $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = 4$.
Tehát $13-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = 4$, vagyis $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = 9$, így $\left|a-\frac{1}{a}\right| = 3$.

(C) Ha $2^a = 3$, akkor $(2^a)^b = 3^b = 4$, azaz $2^{ab} = 4$, tehát $ab = 2$.
Ezért $4^{ab} = 4^2 = 16$.

(D) Ha a műveleteket elvégezzük, egy másodfokú kifejezést kapunk, az ehhez tartozó függvény grafikonja egy száraival felfelé mutató parabola, amely szimmetrikus az $x = 2$ egyenesre. Emiatt ezen az egyenesen van a függvény minimuma, amely $1+0+1 = 2$.

(E) A $[\sqrt{1}], [\sqrt{2}], [\sqrt{3}], \ldots, [\sqrt{n}]$ számok értékei 1, 1, 1, 2, 2, …, 2, 3, 3, 3, 3, …, és a számok átlaga 2, tehát ugyanannyi számnak 1 az értéke, mint amennyinek 3.
A számok között három darab 1-es van, ezért az $[\sqrt{1}], [\sqrt{2}], [\sqrt{3}], \ldots, [\sqrt{n}]$ számok között az utolsó háromnak az értéke 3, míg az előtte levők 3-nál kisebbek. Ez a három szám $[\sqrt{9}]$, $[\sqrt{10}], [\sqrt{11}]$.
Ezért $n = 11$.

A pontozásról. Az első négy feladat ***3 pontos***, az (E) kérdés ***5 pontos***. A helyes válaszok ***1-1 pontot*** érnek. A teljes pontszámot helyes levezetés, indoklás esetén adjuk meg.

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy írja be a körökbe, hogy a szakasszal összekötött körök közül a magasabban lévőbe nagyobb szám kerüljön. Hány különböző kitöltés lehetséges?

(10 pont)

Megoldás. A legfelső körbe kerül a 8. ***1 pont***
Az alatt lévő szintre, a második szinten lévő egyetlen körbe a többi 7 szám közül bármelyiket írhatjuk. ***2 pont***
A megmaradó hat számból a legnagyobb kerül a harmadik szintre, itt nincs választási alternatíva. ***1 pont***
Az alatta lévő két körbe $5 \cdot 4$-féleképp írhatunk két számot. ***2 pont***
A megmaradt három számot a bal oldalon lévő körökbe 2-féleképpen írhatjuk, hiszen a legnagyobb kerül felülre, és a megmaradó két számot 2-féle sorrendben írhatjuk be. ***2 pont***
A kitöltések száma $7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 280$. ***2 pont***

4. Oldja meg a $(\log_3 x) \cdot \log_4 \frac{x}{3} = \log_2 3$ egyenletet. ***(11 pont)***

Megoldás. Csak pozitív szám lehet az *x*. Használjuk a logaritmus azonosságait:

$(\log_3 x) \cdot \log_4 \frac{x}{3} = \log_2 3$,

$\log_3 x \cdot \frac{\log_3 x - 1}{\log_3 4} = \frac{1}{\log_3 2}$, ***3 pont***

$\log_3 x \cdot \frac{\log_3 x - 1}{2 \cdot \log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2}$ ***1 pont***

$\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1) = 2$ ***2 pont***

$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$ ***2 pont***

Az egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{1}{3}$ és $x_2 = 9$. ***2 pont***

Ellenőrzés mutatja, hogy ezek megoldások. ***1 pont***

5. Egy háromszög két oldalának hossza 3 és 7 egység, és a szögei számtani sorozatot alkotnak. Mekkora a háromszög harmadik oldala? ***(14 pont)***

Megoldás. Ha a háromszög szögei $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$, akkor $(\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = 180°$ miatt $\alpha = 60°$. ***2 pont***

Ezzel a $60°$-os szöggel szemben lévő oldal hossza 3, 7 vagy *x*, ahol *x* a harmadik oldal hossza. Írjuk fel mindegyik esetben a koszinusz-tételt. ***2 pont***

$3^2 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cdot \cos 60°$, azaz $x^2 - 7x + 40 = 0$. ***2 pont***

Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása. (A harmadik oldal nem lehet kisebb, mint 3, mert nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség.) ***1 pont***

$7^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 60°$, azaz $x^2 - 3x - 40 = 0$. ***2 pont***

$x^2 - 3x + 40 = (x + 5) \cdot (x - 8)$. A pozitív gyök lesz a háromszög oldala, $x = 8$. ***1 pont***

$x^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \cos 60°$. ***2 pont***

Innen $x^2 = 37$, innen $x = \sqrt{37}$. ***1 pont***

A háromszög harmadik oldalának hossza 8 vagy $\sqrt{37}$. ***1 pont***

6. Egy szobában 20-an vannak, lovagok és lókötők. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők minden állítása hamis. Mindenki egy állítást mond, vagy ezt: „Legalább öt tőlem alacsonyabb lókötő van a szobában"; vagy pedig ezt: „Legalább öt tőlem magasabb lókötő van a szobában." Hány lókötő lehet a szobában, ha nincs két azonos magasságú közöttük? ***(18 pont)***

Megoldás. A lókötőket állítsuk nagyság szerint sorba. Ha 10-nél többen vannak, akkor a 6. helyen álló lókötő igazat mondana, így legfeljebb 10-en lehetnek. ***4 pont***

Ha 5-nél kevesebb lókötő van, akkor a lovagok hazudnának. Ez sem lehet, emiatt legalább 5 lókötő van a szobában. ***4 pont***

A lókötők számára ezek a lehetőségek maradtak: 5, 6, 7, 8, 9 vagy 10. ***2 pont***

Ezek mindegyike lehetséges, ha a lovagok magasabbak a lókötőknél, és az öt legmagasabb lókötő ezt mondja: „Legalább öt tőlem magasabb lókötő van a szobában”; és mindenki más mondja ezt: „Legalább öt tőlem alacsonyabb lókötő van a szobában.” ***6 pont***

Tehát a szobában lévő lókötők száma 5, 6, 7, 8, 9 vagy 10. ***2 pont***

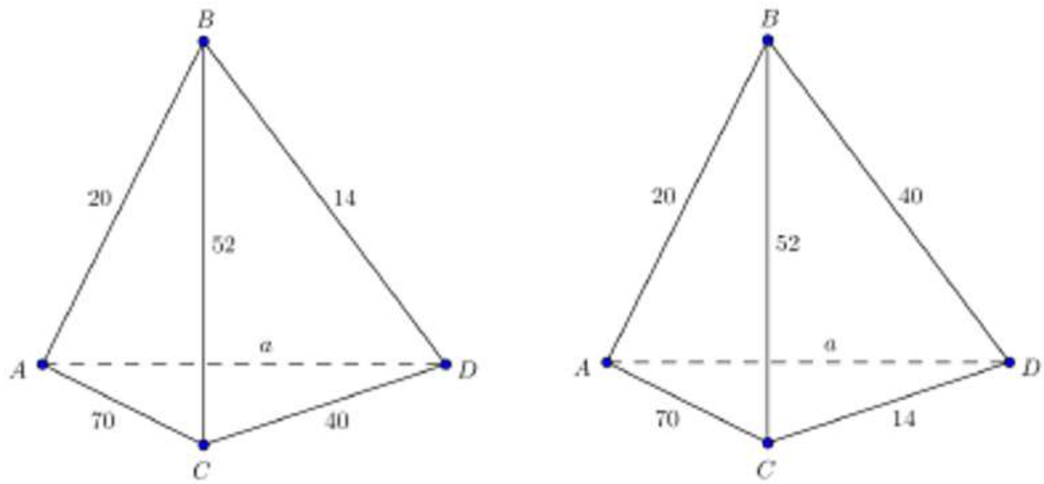
7. Egy tetraédernek mind a hat éle egész hosszúságú. Öt élének hossza 14, 20, 40, 52 és 70. Mekkora lehet a hatodik él? ***(20 pont)***

Megoldás. Az $ABCD$ tetraéder hatodik éle legyen AD. A megmaradó öt él két háromszöglapon helyezkedik el, melynek egy közös éle van, a BC él. ***2 pont***

Mekkora lehet ez az él? Figyeljük a háromszög-egyenlőtlenség teljesülését. Ha például 14, akkor csak egy háromszöget tudunk megépíteni, melynek másik két éle 40 és 52, pedig minden élhez két oldallap csatlakozik. $BC = 14$ nem lehet. Ugyanígy kizárható a 20, 40 és a 70 is. ***4 pont***

Csak egy megoldás van, ha $BC = 52$, és a két háromszöglap $(20, 52, 70)$ és $(14, 40, 52)$. ***2 pont***

Legyen $ABC = (20, 52, 70)$. Ekkor a BC élhez csatlakozó másik lap 14 és 40 hosszú éle kétféle helyzetben lehet, lásd az ábrát. ***2 pont***



Mekkora lehet az AD él a hosszúsága?

Nézzük az első tetraédert. A $(70, 40, a)$ lapon az a él hosszúsága legalább 31, míg a $(20, 14, a)$ lapon legfeljebb 33. Itt az AD él hosszúsága 31, 32 vagy 33. ***4 pont***

Nézzük a második tetraédert. A $(70, 14, a)$ lapon az a él hosszúsága legalább 57, míg a $(20, 40, a)$ lapon legfeljebb 59. Itt az AD él hosszúsága 57, 58 vagy 59. ***4 pont***

A tetraéder hatodik éle 31, 32, 33, 57, 58 vagy 59 lehet. ***2 pont***