

12. osztály, technikum

1. Az $x \neq 1, y \neq 1$ pozitív számokra $\log_x y + \log_y x = 7$ teljesül.

Mennyi $(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2$ értéke? (12 pont)

2. Mennyi az értéke? (15 pont)

(A) Az x, y, z valós számokra $x + y + z = 3$ és $x + 2y + 3z = 7$. Mennyi $x + 3y + 5z$ értéke?

(B) Ha $a + \frac{1}{a} = \sqrt{13}$, akkor mennyi $\left|a - \frac{1}{a}\right|$ értéke?

(C) Ha $2^a = 3$ és $3^b = 4$, akkor mennyi 4^{ab} értéke?

(D) Mennyi az $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2$ kifejezés legkisebb értéke?

(E) Az x, y számokra $\frac{3x+y}{x-3y} = -1$ teljesül. Mennyi $\frac{x+3y}{3x-y}$ értéke?

3. Az alábbi négy egyenlőtlenség mindegyikének van megoldása. Adjon meg ilyen x valós számot az egyes egyenlőtlenségekhez. (12 pont)

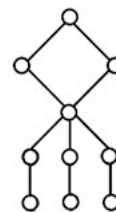
(A) $2x < 2^x < x^2$

(B) $x^2 < 2x < 2^x$

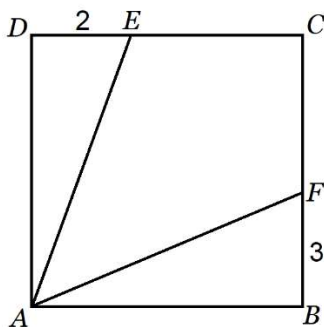
(C) $x^2 < 2^x < 2x$

(D) $2x < x^2 < 2^x$

4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat úgy írja be a körökbe, hogy a szakasszal összekötött körök közül a magasabban lévőbe nagyobb szám kerüljön. Hány különböző kitöltés lehetséges? (9 pont)



5. Az $ABCD$ négyzet oldalain az ábra szerint felvettük az E és F pontot. $DE = 2$, $BF = 3$ és $\angle EAF = \angle BAF$.



Mekkora az AE szakasz? (16 pont)

6. Határozza meg a sík azon pontjainak koordinátáit, amelyekből az $x^2 + y^2 + 2x = 8$ és az $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ körökhöz húzott érintők 6 egység hosszúak. (18 pont)

7. Egy szobában 20-an vannak, lovagok és lókötők. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők minden állítása hamis. Mindenki egy állítást mond, vagy ezt: „Legalább öt tölem alacsonyabb lókötő van a szobában”; vagy pedig ezt: „Legalább öt tölem magasabb lókötő van a szobában.” Hány lókötő lehet a szobában, ha nincs két azonos magasságú közöttük? (18 pont)