Javítási útmutató
12. osztály, technikum

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Az $x \neq 1$, $y \neq 1$ pozitív számokra $\log_x y + \log_y x = 7$ teljesül.
Mennyi $(\log_x y)^2 + \left(\log_y x\right)^2$ értéke? ***(12 pont)***

Megoldás. Emeljük négyzetre a $\log_x y + \log_y x = 7$ egyenlőséget. ***4 pont***

$(\log_x y)^2 + \left(\log_y x\right)^2 + 2 \cdot \log_x y \cdot \log_y x = 49$ ***3 pont***

Az ismert azonosság szerint: $\log_x y \cdot \log_y x = 1$, ***3 pont***

így $(\log_x y)^2 + \left(\log_y x\right)^2 = 49 - 2 = 47$. ***2 pont***

Megjegyzés. Az egyenlet $a + \frac{1}{a} = 7$ szerkezetű. Ennek felismerése ***4 pont***. Az egyenlet megoldása ***2 pont***. Mindkét gyökre ugyanaz a gyökök négyzetösszege ***2 pont***, ennek kiszámítása ***4 pont***.

2. Mennyi az értéke? ***(3+3+3+3+3 = 15 pont)***

(A) Az *x, y, z* valós számokra $x + y + z = 3$ és $x + 2y + 3z = 7$. Mennyi $x + 3y + 5z$ értéke?
(B) Ha $a + \frac{1}{a} = \sqrt{13}$, akkor mennyi $\left|a - \frac{1}{a}\right|$ értéke?
(C) Ha $2^a = 3$ és $3^b = 4$, akkor mennyi 4^{ab} értéke?
(D) Mennyi az $(x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2$ kifejezés legkisebb értéke?
(E) Az *x, y* számokra $\frac{3x+y}{x-3y} = -1$ teljesül. Mennyi $\frac{x+3y}{3x-y}$ értéke?

Megoldás. (A) $x + y + z = 3$, $x + 2y + 3z = 7$, $x + 3y + 5z$ számtani sorozatot alkot, azaz 3, 7, $x + 3y + 5z$ számtani sorozat, így $x + 3y + 5z = 11$.
Másképp számolva: $x + 3y + 5z = 2 \cdot (x + 2y + 3z) - (x + y + z) = 11$.

(B) Az $a + \frac{1}{a} = \sqrt{13}$ egyenlőségből egy másodfokú egyenlet adódik, innen számolhatjuk *a* lehetséges értékeit, és abból $\left|a - \frac{1}{a}\right|$ értékét.
Elkerülhetjük a másodfokú egyenlet megoldását, és az azt követő számolásokat.
Gondoljunk arra, hogy $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$ és $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$, ezért a különbségük $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4$.
Tehát $13 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4$, vagyis $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 9$, így $\left|a - \frac{1}{a}\right| = 3$.

(C) Ha $2^a = 3$, akkor $(2^a)^b = 3^b = 4$, azaz $2^{ab} = 4$, tehát $ab = 2$.
Ezért $4^{ab} = 4^2 = 16$.

(D) Ha a műveleteket elvégezzük, egy másodfokú kifejezést kapunk, az ehhez tartozó függvény grafikonja egy száraival felfelé mutató parabola, amely szimmetrikus az $x = 2$ egyenesre. Emiatt ezen az egyenesen van a függvény minimuma, amely $1 + 0 + 1 = 2$.

(E) $\frac{3x+y}{x-3y} = -1$, azaz $3x + y = -(x - 3y)$, $3x + y = -x + 3y$,
innen $4x = 2y$, vagyis $y = 2x$. Ezért $\frac{x+3y}{3x-y} = \frac{x+6x}{3x-2x} = \frac{7x}{x} = 7$.

A pontozásról. Mind az öt feladat ***3 pontos.*** A helyes válaszok ***1-1 pontot*** érnek. A teljes pontszámot helyes levezetés, indoklás esetén adjuk meg.

3. Az alábbi négy egyenlőtlenség mindegyikének van megoldása. Adjon meg ilyen x valós számot az egyes egyenlőtlenségekhez. ***(12 pont)***

(A) $2x < 2^x < x^2$

(B) $x^2 < 2x < 2^x$

(C) $x^2 < 2^x < 2x$

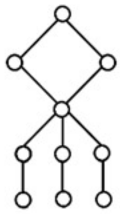
(D) $2x < x^2 < 2^x$

Megoldás. (A) Ha $x = -1$, akkor $2x = -2$, $x^2 = 1$ és $2^x = \frac{1}{2}$, azaz ekkor $2x < 2^x < x^2$ teljesül. ***3 pont***

(B) Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor $2x = 1$, $x^2 = \frac{1}{4}$ és $2^x = \sqrt{2}$, ekkor $x^2 < 2x < 2^x$. ***3 pont***

(C) Ha $x = \frac{3}{2}$, akkor $2x = 3$, $x^2 = \frac{9}{4}$ és $2^x = \sqrt{8}$, ekkor $x^2 < 2^x < 2x$. ***3 pont***

(D) Ha $x = 5$, akkor $2x = 10$, $x^2 = 25$ és $2^x = 32$, azaz $2x < x^2 < 2^x$. ***3 pont***



4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat úgy írja be a körökbe, hogy a szakasszal összekötött körök közül a magasabban lévőbe nagyobb szám kerüljön. Hány különböző kitöltés lehetséges? ***(9 pont)***

Megoldás. A 10-et írjuk felülre. ***1 pont***

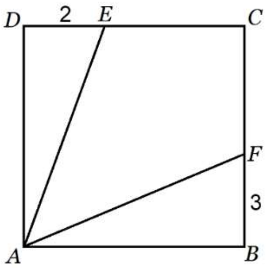
A második sorba kerül a 8 és 9 (ez 2 lehetőség), a harmadik sorba a 7. ***2 pont***

Ezután a három egymás alatti számpárt úgy írhatjuk be, hogy a megmaradó 6 számból választunk kettőt (ez 15 lehetőség), őket nagyság szerinti sorrendben írjuk az első ágba. ***2 pont***

Majd a megmaradt 4 számból kettőt (ez 6 lehetőség), ezeket a középső ágon helyezzük el, végül beírjuk a megmaradt két számot a megfelelő sorrendben. ***2 pont***

A kitöltések száma összesen: $2 \cdot 15 \cdot 6 = 180$. ***2 pont***

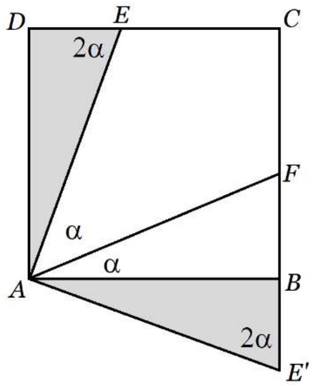
5. Az $ABCD$ négyzet oldalain az ábra szerint felvettük az E és F pontot. $DE = 2$, $BF = 3$ és $EAF\angle = BAF\angle$.



Mekkora az AE szakasz? ***(16 pont)***

1. megoldás. $EAF\angle = BAF\angle = \alpha$, így $EAB\angle = 2\alpha$, és $EAB\angle = AED\angle = 2\alpha$. ***2 pont***

Az ADE háromszöget forgassuk el A körül 90°-kal, így kapjuk az ABE' háromszöget. ***4 pont***



$AFB\angle = 90° - \alpha$, ezért az AFE' háromszög harmadik szöge:

$FAE'\angle = 180° - (2\alpha + 90° - \alpha) = 90° - \alpha$, tehát $FAE'\angle = AFE'\angle$. ***2 pont***

Az AFE' háromszög egyenlő szárú. ***2 pont***

Ezért $E'A = E'F$. ***2 pont***

$E'F = E'B + BF = 2 + 3 = 5$, tehát $E'A = 5$. ***2 pont***

Mivel $E'A = EA$, így $AE = 5$. ***2 pont***

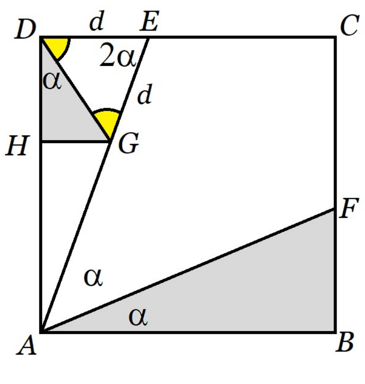
2. megoldás. $EAF\angle = BAF\angle = \alpha$, így $EAB\angle = 2\alpha$, és $EAB\angle = AED\angle = 2\alpha$. ***2 pont***

Az AE szakaszon felvesszük a G pontot úgy, hogy $GE = DE$. ***2 pont***

Az EDG egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei $90° - \alpha$ nagyságúak.

Emiatt $GDA\angle = \alpha$. ***2 pont***

Az AD oldalon a H pontot úgy vesszük fel, hogy $GH \perp AD$. ***2 pont***



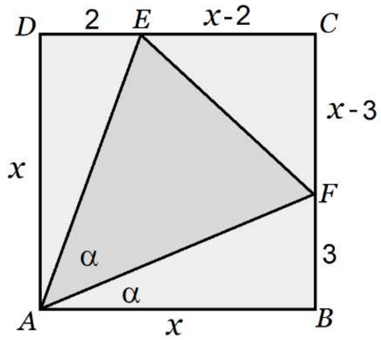
$AHG\Delta \sim ADE\Delta$ és $DHG\Delta \sim ABF\Delta$.

A hasonlóságokat használjuk: $\frac{AG}{GE}=\frac{AH}{HD}=\frac{AH}{HG}\cdot\frac{HG}{HD}=\frac{AD}{DE}\cdot\frac{FB}{AB}=\frac{FB}{DE}$. **_4 pont_**

$GE=DE$ miatt $AG=FB$. **_2 pont_**

Az utóbbi két egyenlőség alapján $AE=AG+GE=FB+ED$, azaz $AE=FB+ED$, vagyis $AE=3+2=5$. **_2 pont_**

3. megoldás. A négyzet oldalának hossza legyen *x*. Írjuk fel a négyzet területét az ábrán megrajzolt négy háromszög területének összegeként. **_2 pont_**



$x^2=x+\frac{3}{2}x+\frac{(x-2)(x-3)}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\sin\alpha$. **_4 pont_**

Az *ABF* derékszögű háromszögben $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$. **_2 pont_**

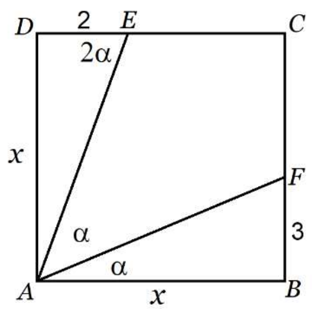
Így az $x^2=x+\frac{3}{2}x+\frac{(x-2)(x-3)}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{x^2+4}$ egyenlethez jutunk. **_2 pont_**

Rendezés után az $x^2(x^2-21)=0$ egyenletet kapjuk, mivel $x\neq 0$, így $x^2=21$. **_2 pont_**

Az *ADE* derékszögű háromszögben $x^2+DE^2=AE^2$. **_2 pont_**

Innen $AE=5$. **_2 pont_**

4. megoldás. $EAF\angle=BAF\angle=\alpha$, így $EAB\angle=2\alpha$, és $EAB\angle=AED\angle=2\alpha$. **_2 pont_**



Ha a négyzet oldala *x*, akkor $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{x}$ és $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{x}{2}$. **_4 pont_**

A $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ összefüggést használva $\frac{x}{2}=\frac{\frac{6}{x}}{1-\left(\frac{3}{x}\right)^2}=\frac{6x}{x^2-9}$. **_4 pont_**

Esetünkben $x\neq 0$, így $x^2-9=12$, azaz $x^2=21$. **_2 pont_**

Az *ADE* derékszögű háromszögben $x^2+DE^2=AE^2$. **_2 pont_**

Innen $AE=5$. **_2 pont_**

A pontozáshoz. Részmegoldásnál pontozhatjuk a jó ötleteket, illetve vonjunk le pontokat a következtetés hiányosságaiért.

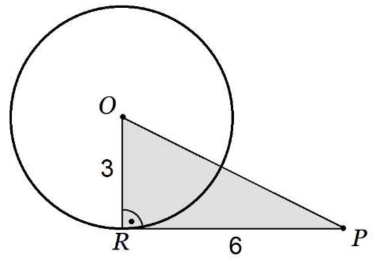
6. Határozza meg a sík azon pontjainak koordinátáit, amelyekből az $x^2 + y^2 + 2x = 8$ és az $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ körökhöz húzott érintők 6 egység hosszúak. ***(18 pont)***

Megoldás. A két kör középponti egyenlete: $(x+1)^2 + y^2 = 9$ és $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$. ***4 pont***

Tehát a körök középpontja $O_1(-1; 0)$ és $O_2(2; 3)$, és mindkét kör sugara 3 egység. ***2 pont***

Ha a *P* pontból az *O* középpontú körhöz húzott *PR* érintőszakasz hossza 6, akkor

$$OP^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$



Ezért $PO_1^2 = 45$ és $PO_2^2 = 45$. ***3 pont***

$PO_1^2 = 45$, azaz $(x+1)^2 + y^2 = 45$, ahol a *P* pont koordinátái: $(x; y)$. ***1 pont***

$PO_2^2 = 45$, azaz $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 45$. ***1 pont***

Mindkét egyenletben elvégezve a műveleteket, a két egyenlet különbsége $6x + 6y = 12$, azaz $y = 2 - x$. ***2 pont***

Ezt beírva az előbbi két egyenlet közül az elsőbe $(x+1)^2 + (2-x)^2 = 45$. ***2 pont***

Innen $x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4) = 0$, így két pont adódik megoldásként: $P_1(5; -3)$ és $P_2(-4; 6)$. ***2 pont***

Ellenőrzés mutatja, hogy ezek megoldások. ***1 pont***

7. Egy szobában 20-an vannak, lovagok és lókötők. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők minden állítása hamis. Mindenki egy állítást mond, vagy ezt: „Legalább öt tőlem alacsonyabb lókötő van a szobában"; vagy pedig ezt: „Legalább öt tőlem magasabb lókötő van a szobában." Hány lókötő lehet a szobában, ha nincs két azonos magasságú közöttük? ***(18 pont)***

Megoldás. A lókötőket állítsuk nagyság szerint sorba. Ha 10-nél többen vannak, akkor a 6. helyen álló lókötő igazat mondana, így legfeljebb 10-en lehetnek. ***4 pont***

Ha 5-nél kevesebb lókötő van, akkor a lovagok hazudnának. Ez sem lehet, emiatt legalább 5 lókötő van a szobában. ***4 pont***

A lókötők számára ezek a lehetőségek maradtak: 5, 6, 7, 8, 9 vagy 10. ***2 pont***

Ezek mindegyike lehetséges, ha a lovagok magasabbak a lókötőknél, és az öt legmagasabb lókötő ezt mondja: „Legalább öt tőlem magasabb lókötő van a szobában"; és mindenki más mondja ezt: „Legalább öt tőlem alacsonyabb lókötő van a szobában." ***6 pont***

Tehát a szobában lévő lókötők száma 5, 6, 7, 8, 9 vagy 10. ***2 pont***