(9. osztály)
Megoldások

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Keressük meg az összes olyan pozitív egész számokból álló számpárt, melyek összege és szorzata is prímszám!

(14 pont)

Megoldás:
Jelölje a két egész számot x, y. Mivel ezek szorzata prímszám, ez csak úgy lehetséges, ha ezek egyike pl. $x = 1$.

(4 pont)

Így a feltételek szerint az y és az $1 + y$ is prímszám. Ez viszont csak abban az esetben lehetséges, ha $y = 2$. Ekkor az $1 + y = 3$, ami szintén prím.

(5 pont)

Tehát az x és y szimmetrikus szerepe miatt az $(1; 2)$és a $(2; 1)$ számpár tesz eleget a feltételeknek.

(5 pont)

Megjegyzés: Ha valaki ellenőrzéssel megadja a két számpárt, akkor 5 pontot, ha csak egyiket, akkor 3 pontot kaphat.

Összesen: 14 pont

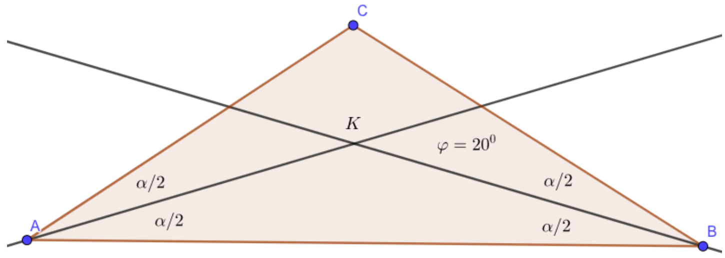
2. Egy egyenlőszárú háromszög alapjának végpontjaiból kiinduló szögfelezők által bezárt szög 20º-os. Mekkorák a háromszög szögei?

(14 pont)

Megoldás:
Jelölje a szögfelezők metszéspontját *K*.

I. Ha az *AKB* szög 20º-os lenne, akkor $\frac{\alpha}{2} = 80^0$ lenne, ami azt jelentené, hogy az *ABC* háromszög alapon levő szögeinek nagysága $\alpha = 160^0$, ami nem lehetséges. Tehát a 20º-os szög csak az *AKB* háromszög külső szöge lehet.

(5 pont)



II. Ha tehát az ábrának megfelelően a 20° külső szög, akkor erre a külső szögre felírható: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 20^0$, amiből $\alpha = 20^0$ adódik.

(5 pont)

A háromszögek belső szögeinek összege alapján a szárak által bezárt szög pedig $\beta = 140^0$ lesz.

(4 pont)

Összesen: 14 pont

3. Adott a 30-nál kisebb pozitív természetes számok halmaza. Fel tudjuk-e osztani két olyan közös elemet nem tartalmazó részhalmazra, melyben a számok összege megegyezik?

(16 pont)

Megoldás:

Vegyük a 30-nál kisebb pozitív egész számok összegét:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 29 = \frac{29 \cdot 30}{2} = 29 \cdot 15 = 435$$

(12 pont)

Ez a szám páratlan, így a feltételnek megfelelő felosztás nem végezhető el.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. Adott két párhuzamos egyenes *e* és *f*. Az *e*-n kijelölünk 6, míg az *f*-en 7 pontot. Hány különböző háromszöget határoznak meg ezek a pontok?

(18 pont)

Megoldás:

Háromszögeket kétféleképpen kaphatunk, ha az *e* egyenesről választunk két pontot és az *f*-ről egyet, vagy az *f*-ről választunk két pontot és az *e*-ről egyet.

(4 pont)

Az első esetben a keletkező háromszögek száma: $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 7 = 105$.

(6 pont)

A második esetben keletkező háromszögek száma: $\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 126$.

(6 pont)

Így az ábrából összesen 231 háromszöget kaphatunk.

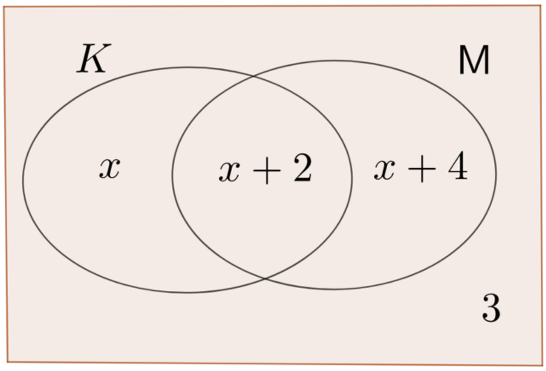
(2 pont)

Összesen: 18 pont

5. Egy utcában 33 ház van. Néhányban csak kutyát tartanak, 2-vel több házban kutya és macska is van, viszont ezeknél 2 házzal többen csak macska van. Hány olyan ház van az utcában, amelyben kutya és macska is található, ha tudjuk, hogy 3 olyan ház van, ahol semmilyen háziállatot sem tartanak?

(18 pont)

Megoldás:
Készítsünk halmazábrát, ahol az alaphalmaz a házak halmaza, *K* a kutyás és *M* a macskás házak halmaza:



(5 pont)

Jelöljük *x*-szel a csak kutyát tartók házainak halmazát. Így az ábrát kitöltve a következő egyenlethez jutunk:

$$x + x + 2 + x + 4 + 3 = 33$$

(5 pont)

Az egyenletet megoldva $x = 8$ adódik.

(5 pont)

Tehát 10 olyan ház van, amelyben kutya és macska is található.

(3 pont)

Összesen: 18 pont

6. Mekkora az $S = 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + \cdots$ kifejezés értéke, ha abban minden harmadik művelet kivonás és 2019-ig írjuk fel a tagokat?

(20 pont)

Megoldás:
Mivel a 2019 osztható hárommal, ezért a kérdéses kifejezésben az utolsó művelet kivonás lesz.

(4 pont)

Először határozzuk meg az $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2019$ összeget. Ennek az értéke:

$$S_1 = \frac{2019 \cdot 2020}{2} = 2039190$$

(6 pont)

Ezután a 3-mal osztható számok összege:

$$S_2 = 3 + 6 + 9 + \cdots + 2019 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 673) = 3 \cdot \frac{673 \cdot 674}{2} = 680403$$

(6 pont)

A kérdéses kifejezés értékét ezek alapján számolhatjuk:

$$S = S_1 - 2S_2 = 678384$$

(4 pont)

Összesen: 20 pont

(9. osztály)
Megoldások
Az első három feladat megoldása azonos a szakközépiskolai feladatok megoldásával.

1. Keressük meg az összes olyan pozitív egész számokból álló számpárt, melyek összege és szorzata is prímszám!

(14 pont)

2. Egy egyenlőszárú háromszög alapjának végpontjából kiinduló szögfelezők által bezárt szög 20^{o}-os. Mekkorák a háromszög szögei?

(14 pont)

3. Adott a 30-nál kisebb pozitív természetes számok halmaza. Fel tudjuk-e osztani két olyan közös elemet nem tartalmazó részhalmazra, melyben a számok összege megegyezik?

(16 pont)

4. Határozzuk meg azt a legkisebb természetes számot, amely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva maradékul rendre 1-et, 2-t, 3-at, 4-et és 5-öt ad!

(18 pont)

Megoldás:
A feladat feltételei azt jelentik, hogy a keresett számot 1-gyel megnövelve az osztható lesz 2-vel 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal is.

(6 pont)

Ezeknek a számoknak a legkisebb közös többszöröse: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

(8 pont)

Így a keresett szám az 59 lesz, ami valóban eleget tesz a feladat feltételeinek!

(4 pont)

Összesen: 18 pont

5. Mely valós x és y értékek esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{5}{xy}=0\ ?$$

(18 pont)

Megoldás:
Az egyenletnek nem lehet megoldása az $x=0$ és $y=0$. Ezért xy tényezővel beszorozhatunk.

(3 pont)

A kapott egyenletet átalakítva:

$$x^2 + y^2 - 4y + 2x + 5 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

(8 pont)

Ez csak akkor teljesülhet, ha az összeg minkét tagja nulla, azaz $x = -1$ és $y = 2$ esetén.

(5 pont)

Ezek valóban megoldások, és más megoldása nincs a feladatnak.

(2 pont)

Összesen: 18 pont

6. Hány nullára végződik, ha 100-tól 200-ig összeszorozzuk a pozitív egész számokat?

(20 pont)

Megoldás:

A nullák számát az dönti el, hogy a szorzat hány $2 \cdot 5$-ös tényezőpárt tartalmaz.

(3 pont)

Először számoljuk össze a 2-es prímtényezőinek számát!
100-tól 200-ig található
2-vel osztható: 51 szám,
4-gyel osztható: 26 szám,
8-cal osztható: 13 szám,
16-tal osztható: 6 szám,
32-vel osztható: 3 szám,
64-gyel osztható: 2 szám,
128-cal osztható: 1 szám.
Ezek összege megadja a szorzatban szereplő 2-es prímtényezők számát, ami 102.

(7 pont)

Hasonlóan összeszámolva az 5-ös prímtényezők számát.
5-tel osztható: 21 szám,
25-tel osztható: 5 szám
125-tel osztható: 1 szám.
Így az 5-ös prímtényezők száma: 27.

(7 pont)

Az ezekből képezhető 10-es tényezők száma ezért 27 lesz, ami azt jelenti, hogy a kérdéses szorzat 27 nullára fog végződni.

(3 pont)

Megjegyzés: Abban az esetben, ha valaki csak arra hivatkozik, hogy a számok között 51 páros szám található, és ezek száma nyilván több, mint az összeszámolt 5-ös prímtényezők száma (27), az első részben a 2-es prímtényezők számáért járó 7 pontot ezért is kapja meg!

Összesen: 20 pont

(10. osztály)
Megoldások

1. Egy osztályban 10 fiú és 12 lány van. 3 fős csoportot szeretnének kijelölni úgy, hogy legalább egy fiú és lány is legyen a kiválasztottak között. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

(14 pont)

Megoldás:

A feladatnak a nemeket figyelembe véve kétféle csoport felel meg. Az egyikben két fiú és egy lány a másikban egy fiú és két lány kerül kiválasztásra.

(2 pont)

Az első fajta csoportok száma: $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 12 = 540$.

(5 pont)

A második fajta csoportok száma: $\frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 10 = 660$.

(5 pont)

Ennek alapján az összes lehetséges csoport száma $540 + 660 = 1200$ lesz.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

2. Hány nullára végződik tízes számrendszerben felírva az $(5^{11} - 5^{9})^{20}$ szám?

(14 pont)

Megoldás:

Bontsuk fel a számot prímtényezők szorzatára:

$$(5^{11} - 5^{9})^{20} = \left(5^{9} \cdot (5^{2} - 1)\right)^{20} = 5^{180} \cdot (2^{3} \cdot 3)^{20} = 5^{180} \cdot 2^{60} \cdot 3^{20}$$

(8 pont)

A szám végén található nullák száma azon múlik, hogy ezekből hány $2 \cdot 5 = 10$ tényező képezhető.

(2 pont)

Ezek száma 60 lesz, hiszen a 2-es prímtényezőből ennyi áll rendelkezésünkre. Tehát a szám 60 nullára fog végződni.

(4 pont)

Összesen: 14 pont

3. Miért nem tudunk olyan konvex hétszöget rajzolni, amelynek 4 hegyesszöge van?

(16 pont)

Megoldás:

Ha tudnánk a feladatnak megfelelő konvex hétszöget rajzolni, akkor a négy hegyesszögnél található külső szögek mindegyike tompaszög lenne, azaz 90°-nál nagyobb.

(6 pont)

Tudjuk, hogy bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

(5 pont)

A hegyesszögeknél található négy külső szög összege már nagyobb lenne mint $4 \cdot 90 = 360^o$, ezért a feladatnak megfelelő hétszög nem létezhet.

(5 pont)

Összesen: 16 pont

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{x-1}{|x|} = \frac{x}{|x-1|}, (x \neq 0; x \neq 1)$$

(18 pont)

Megoldás:

Az abszolútérték értelmezése miatt a megoldást bontsuk három részre!

(1 pont)

Ha $x < 0$, akkor az egyenletünk:

$$\frac{x-1}{-x} = \frac{x}{-x+1}$$

Ezt átrendezve

$$-x^2 + 2x - 1 = -x^2$$

adódik, melyből $x = \frac{1}{2}$ kapható, ami viszont nem eleme a megengedett tartománynak.

(5 pont)

Ha $0 < x < 1$, akkor

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{-x+1}$$

Ebből azonos átalakításokkal:

$$x^2 + (x-1)^2 = 0$$

Az egyenletnek nincs megoldása, mert a bal oldal két tagja egyszerre nem lehet 0.

(5 pont)

Ha $1 < x$, akkor

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-1}$$

Ebből:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2$$

adódik, melynek megoldása $x = \frac{1}{2}$ lenne, ez viszont nem eleme a megengedett tartománynak.

(5 pont)

Így az egyenletnek nem lesz megoldása a valós számok halmazán.

(2 pont)

Összesen:18 pont

5. Hány megoldása van az $x + y + z = 32$ egyenletnek, ahol *x, y* és *z* mindegyike pozitív prímszám?

(18 pont)

Megoldás:

Kezdetben tegyük fel, hogy $x \leq y \leq z$.

Mivel a három prím összege páros, ezért nem lehet mindegyik páratlan szám, tehát van közöttük páros. Ez $x = 2$ lehet.

(3 pont)

Így:

$$y + z = 30$$

adódik, melyben mindkét prím páratlan lesz.

Az *y* lehetséges értékeit figyelembe véve, ahol *y* páratlan prím:

y	3	5	7	11	13
z	27	25	23	19	17

(6 pont)

Ezek közül csak az utolsó három oszlop jelent megoldást.

Így a feladatnak három különböző növekvő számhármas tesz eleget:

$$(x; y; z)_1 = (2; 7; 23)$$
$$(x; y; z)_2 = (2; 11; 19)$$
$$(x; y; z)_1 = (2; 13; 17)$$

(6 pont)

Mindegyik megoldás tetszőleges sorrendje is megoldást ad, így összesen $3 \cdot 6 = 18$ számhármas tesz eleget a feladatnak.

(3 pont)

Összesen: 18 pont

6. Egy könyv és füzet ára 2200 Ft. A könyv 200 forinttal drágább, mint 3 füzet. Hány könyvet és füzetet vásárolt valaki, ha ezért 27000 forintot fizetett?

(20 pont)

Megoldás:

Ha füzet ára *x*, akkor a könyv $3x + 200$ forintba kerül.

(2 pont)

Ezek alapján:

$$x + 3x + 200 = 2200$$

Innét a füzet árára 500, a könyv árára 1700 forint adódik.

(6 pont)

Ha megvásárolt füzetek száma *f*, a könyvek száma *k*, akkor:

$$1700k + 500f = 27000$$

Ebből átrendezéssel:

$$17k = 5(54 - f)$$

adódik.

(6 pont)

Mivel a jobb oldal biztosan osztható 5-tel, így a bal oldalon álló érték is 5-tel osztható.

A *k* lehetséges értékeit felsorolva kapjuk az *f* lehetséges értékeit:

k	0	5	10	15
f	54	37	20	3

Így a feladatnak ez a négy megoldása lehetséges.

(6 pont)

(10. osztály)
Megoldások
Az első három feladat megoldása azonos a szakközépiskolai feladatok megoldásával.

1. Egy osztályban 10 fiú és 12 lány van. 3 fős csoportot szeretnének kijelölni úgy, hogy legalább egy fiú és lány is legyen a kiválasztottak között. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

(14 pont)

2. Hány nullára végződik tízes számrendszerben felírva az $(5^{11}-5^{9})^{20}$ szám?

(14 pont)

3. Miért nem tudunk olyan konvex hétszöget rajzolni, amelynek 4 hegyesszöge van?

(16 pont)

4. 40 db tárgyunk van, melyek tömege rendre 1, 2, 3, ..., 40 gramm. Feloszthatjuk-e a 40 tárgyat 4 tízes csoportra úgy, hogy a csoportban lévő tárgyak össztömege egyenlő legyen?

(18 pont)

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy létezik a feladatnak megfelelő felosztás.

(2 pont)

Rendezzük párba a tömegeket úgy, hogy mindegyik pár összege 41 legyen:

$$(1;40),(2;39),(3;38),\ldots,(20;21)$$

Így 20 párunk lesz melyekben egyenlő az összeg.

(8 pont)

Vegyünk ezek közül 5-5 párt. Ezek mindegyik 10 számot tartalmaz, melyekben az összeg ugyanaz $5\cdot 41=205$.
Ezzel a megfelelő felosztást kaptuk.

(8 pont)

Összesen: 18 pont

5. Hány olyan egész számpár van, ahol a számok szorzata háromszorosa a számok összegének?

(18 pont)

Megoldás:

Jelölje a számokat *a* és *b*. Így:

$$ab=3(a+b)$$

(2 pont)

Ezt átrendezve szorzattá alakíthatjuk:

$$ab-3a-3b+9=9$$

$$(a-3)(b-3)=9$$

(8 pont)

A baloldal tényezőinek lehetséges értékei határozzák meg *a* és *b* értékét.

a-3	*b*-3	*a*	*b*
-1	-9	2	-6
-3	-3	0	0
-9	-1	-6	2
1	9	4	12
3	3	6	6
9	1	12	4

(6 pont)

Az ellenőrzés során meggyőződhetünk róla, hogy mind a hat számpár megoldása lesz a feladatnak.

(2 pont)

Összesen: 18 pont

6. Egy derékszögű háromszög mindegyik oldalának hossza kétjegyű egész szám. Az egyik befogó annyival nagyobb a másiknál, mint amennyivel kisebb az átfogónál. Legfeljebb mekkora lehet a háromszög területe?

(20 pont)

Megoldás:

Jelölje az oldalak hosszát növekvő sorrendben: $x-a, x, x+a$, ahol x és a, pozitív egész számok.

A háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

$$(x-a)^2+x^2=(x+a)^2$$

(5 pont)

Ezt rendezve:

$$x(x-4a)=0$$

adódik.

(5 pont)

Mivel $x \neq 0$, ezért ennek a megoldása: $x=4a$.

A háromszög oldalainak hossza: $3a; 4a; 5a$.

(4 pont)

A terület akkor a legnagyobb, ha az oldalak a legnagyobbak. Mivel mindegyik oldal hossza kétjegyű egész szám ezért az átfogó maximuma $5a=95$ lehet.

(4 pont)

Ekkor a háromszög oldalai: $57; 76; 95$, és így a területe $\frac{57\cdot 76}{2}=2166$ területegység.

(2 pont)

Összesen: 20 pont