(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Két tálcán 70 db sütemény van. Az egyiken levő sütemények 15 %-a ugyanannyi, mint a másikon levők 20 %-a. Hány sütemény került az egyes tálcákra?

(14 pont)

Megoldás:

Ha az egyik tálcán levő sütemények száma x, akkor a másikon $70 - x$ található.

(2 pont)

A feltételek szerint: $0{,}15 \cdot x = 0{,}2 \cdot (70 - x)$.

(4 pont)

Az egyenletet megoldva $x = 40$ adódik.

(5 pont)

Az egyes tálcákon található sütemények száma 40 és 30, és ezt az ellenőrzés is igazolja.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy 24 fős osztályból a tanulók ¼-e jár matematikából és magyarból is szakkörre. A magyar szakkörösök létszáma egyenlő a matematika szakkörösök létszámának 4/5 részével. A magyar szakkörre járók fele jár matematika szakkörre is. Hányan nem járnak az osztályból egyik szakkörre sem?

(14 pont)

Megoldás:

A feltételek alapján 6 tanuló jár matematikából és magyarból is szakkörre.

(2 pont)

Mivel a magyar szakkörösök fele jár matematika szakkörre is, ezért a magyar szakkörösök száma 12.

(2 pont)

Ez a matematika szakkörösök létszámának 4/5 része, így a matematika szakkörösök összesen 15-en vannak.

(4 pont)

Így azok száma, akik legalább az egyik szakkörre járnak: $12 + 15 - 6 = 21$ fő.

(4 pont)

Azok, akik egyik szakkörnek sem tagjai: $24 - 21 = 3$-an vannak.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. Számológép használata nélkül döntsük el, hogy a két szám közül melyik szám a nagyobb, $A = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}$ vagy a $B = \sqrt{4\sqrt{3\sqrt{2}}}$?

(16 pont)

Megoldás:

A két számot közös gyökjellel felírva:

$$A = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 4}}} = \sqrt[8]{2^6 \cdot 3^2}$$

(7 pont)

$$B = \sqrt{\sqrt{\sqrt{4^4 \cdot 3^2 \cdot 2}}} = \sqrt[8]{2^9 \cdot 3^2}$$

(7 pont)

Így a B szám lesz a nagyobb.

(2 pont)

Összesen: 16 pont

4. Arthur király és néhány lovagja lovagi tornát szervezett. Mindenki mindenkivel egyszer mérkőzött volna meg, de Arthur mérkőzéseinek felén tudott csak részt venni, mert közben megsérült. Így összesen 50 bajvívásra került sor. Hány lovag vett részt a tornán?

(18 pont)

Megoldás:

Jelölje a tornán résztvevők számát Arthur királlyal együtt n.

Az eredetileg tervezett bajvívások száma így: $\frac{n(n-1)}{2}$.

(4 pont)

Arthur király a sérülése miatt csak $\frac{n-1}{2}$ bajvívásban tudott részt venni és ugyanennyi elmaradt.

(2 pont)

Az összes bajvívások számára teljesül:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n-1}{2} = 50$$

(4 pont)

A felírt egyenletet rendezve $(n-1)^2 = 100$ adódik. Ezt megoldva a pozitív egész számok halmazán $n = 11$ adódik.

(6 pont)

Tehát a tornán résztvevő lovagok száma 10, melyet az ellenőrzés is megerősít.

(2 pont)

Összesen: 18 pont

5. A lovagi torna után a király és a legkedvesebb hét lovagja egy vacsorához a kerek asztal köré foglaltak helyet. Hányféleképpen tudnak leülni úgy, hogy a király nem szeretne Lancelot lovag mellet ülni? (Két helyfoglalást akkor tekintünk különbözőnek, ha azok az asztal elforgatásával egymásba nem vihetők.)

(18 pont)

Megoldás:
Ahhoz, hogy a forgatással átvihető megoldásokat ne kelljen számolni, egy résztvevő helyét célszerű rögzíteni. Legyen ez Arthur. Így ő egy helyen szerepelhet.

(4 pont)

Lancelot nem ülhet ezen és a két szomszédos helyen. Így számára 5 lehetőség marad.

(4 pont)

A többi 6 lovag viszont tetszőlegesen ültethető sorba, ezeknek a lehetőségeknek a száma $6! = 720$.

(5 pont)

Ezek szorzata adja meg az összes lehetőség számát, ami $5 \cdot 720 = 3600$ lesz.

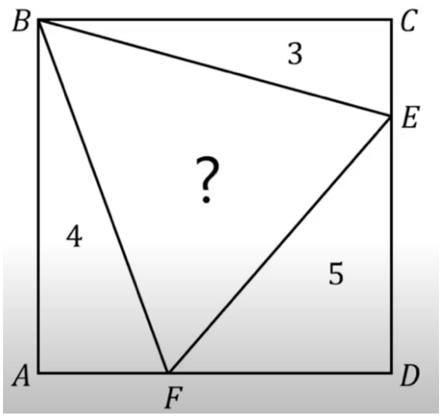
(5 pont)

Összesen: 18 pont

6. Egy *ABCD* négyzetben az ábrán jelölt háromszögek területe 3, 4 illetve 5 területegység. Mekkora a középpen található *BFE* háromszög területe?

(20 pont)

Megoldás:
Jelöljük a négyzet oldalát *a*-val.
Így a területek alapján:



$$\frac{a \cdot AF}{2} = 4$$

Melyből $AF = \frac{8}{a}$ adódik.

(3 pont)

$$\frac{a \cdot CE}{2} = 3$$

Melyből $CE = \frac{6}{a}$ adódik.

(3 pont)

Így $FD = a - \frac{8}{a}$ és $ED = a - \frac{6}{a}$.

(2 pont)

A harmadik háromszög területére:

$$\frac{\left(a - \frac{8}{a}\right)\left(a - \frac{6}{a}\right)}{2} = 5$$

(2 pont)

A műveletek elvégzése és rendezés után a következő alakra hozhatjuk:

$$a^4 - 24a^2 + 48 = 0$$

(4 pont)

Ezt teljes négyzetté alakítva:

$$(a^2 - 12)^2 = 96$$

ahol az $a^2 - (3 + 4 + 5) = a^2 - 12$ éppen a keresett háromszög területével egyenlő.

(4 pont)

Erre pozitív megoldásként $\sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ adódik, ez lesz a keresett terület nagysága.

(2 pont)

Összesen 20 pont