(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Két tálcán 70 db sütemény van. Az egyiken levő sütemények 15 %-a ugyanannyi, mint a másikon levők 20 %-a. Hány sütemény került az egyes tálcákra?

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>
Ha az egyik tálcán levő sütemények száma x, akkor a másikon $70 - x$ található.

(2 pont)

A feltételek szerint: $0{,}15 \cdot x = 0{,}2 \cdot (70 - x)$.

(4 pont)

Az egyenletet megoldva $x = 40$ adódik.

(5 pont)

Az egyes tálcákon található sütemények száma 40 és 30, és ezt az ellenőrzés is igazolja.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy 24 fős osztályból a tanulók ¼-e jár matematikából és magyarból is szakkörre. A magyar szakkörösök létszáma egyenlő a matematika szakkörösök létszámának 4/5 részével. A magyar szakkörre járók fele jár matematika szakkörre is. Hányan nem járnak az osztályból egyik szakkörre sem?

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>
A feltételek alapján 6 tanuló jár matematikából és magyarból is szakkörre.

(2 pont)

Mivel a magyar szakkörösök fele jár matematika szakkörre is, ezért a magyar szakkörösök száma 12.

(2 pont)

Ez a matematika szakkörösök létszámának 4/5 része, így a matematika szakkörösök összesen 15-en vannak.

(4 pont)

Így azok száma, akik legalább az egyik szakkörre járnak: $12 + 15 - 6 = 21$ fő.

(4 pont)

Azok, akik egyik szakkörnek sem tagjai: $24 - 21 = 3$-an vannak.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. Számológép használata nélkül döntsük el, hogy a két szám közül melyik szám a nagyobb, $A = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}$ vagy a $B = \sqrt{4\sqrt{3\sqrt{2}}}$?

(16 pont)

Megoldás:

A két számot közös gyökjellel felírva:

$$A = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 4}}} = \sqrt[8]{2^6 \cdot 3^2}$$

(7 pont)

$$B = \sqrt{\sqrt{\sqrt{4^4 \cdot 3^2 \cdot 2}}} = \sqrt[8]{2^9 \cdot 3^2}$$

(7 pont)

Így a B szám lesz a nagyobb.

(2 pont)

Összesen: 16 pont

4. Béla bácsi körtét árult a piacon. Először eladta a körték negyedrészét, kilogrammonként 720 Ft-ért, majd a maradék ötödrészét, kilogrammonként 520 Ft-ért. Ezután már csak 500 Ft-ot kért kilogrammonként, így eladta a még megmaradt körték 2/3 részét. Végül csak 4 kg körtéje maradt. Mennyi bevételre tett szert?

(18 pont)

Megoldás:

Visszafelé gondolkodva meghatározhatjuk az egyes esetekben eladott körték mennyiségét.

A megmaradt körték alapján az 1/3 rész 4 kg, a 2/3 rész így 8 kg, vagyis az utolsó vevő 8 kg körtét vett $8 \cdot 500 = 4000$ Ft-ért.

(4 pont)

A második vevő esetén a 4/5 rész 12 kg, az 1/5 rész 3 kg, melyért $3 \cdot 520 = 1560$ Ft-ot kapott.

(4 pont)

Az első vevő esetén a ¾ rész 15 kg, az ¼ rész 5 kg, melyért $5 \cdot 720 = 3600$ Ft-ot kapott.

(4 pont)

Tehát a teljes bevétele $4000 + 1560 + 3600 = 9160$ Ft volt.

(2 pont)

Összesen 18 pont

5. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok. Mekkora a köré írható kör sugara?

(18 pont)

Megoldás:

Legyenek a háromszög oldalai: $2n - 2, 2n$ és $2n + 2$.

(4 pont)

Pitagorasz tételét felírva:

$$(2n - 2)^2 + (2n)^2 = (2n + 2)^2$$

(4 pont)

A műveleteket elvégezve és rendezve adódik:

$$n(n-4)=0$$

(6 pont)

Ebből a feladatnak megfelelő háromszög oldalakra csak az $n=4$ ad megoldást. Ekkor a derékszögű háromszög oldalainak hossza: 6, 8 és 10.

(2 pont)

Így a Thalesz-tétel alapján a köré írható kör sugara 5 lesz.

(2 pont)

Összesen 18 pont

6. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet!

$$x^2+|x-y|=4(x-1)$$

(20 pont)

Megoldás:

Redukáljuk nullára az egyenlet jobb oldalát:

$$x^2-4x+4+|x-y|=0$$

(4 pont)

Az első három tag egy teljes négyzet:

$$(x-2)^2+|x-y|=0$$

(6 pont)

Mivel a bal oldalon levő két tag mindegyike nemnegatív, így az egyenlőség csak akkor teljesül, ha mindkét tag nulla.

$$x-2=0$$
$$x-y=0$$

(6 pont)

Ennek megoldása az $x=2$ és az $y=2$ számpár lesz, melyet az ellenőrzés is megerősít.

(4 pont)

Összesen 20 pont