Megoldások

(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Mely valós a és b értékek esetén lesz az $A = a^2 + b^2 + 2a - 4b + 6$ kifejezés értéke a legkisebb, és mennyi ez az érték?

(10 pont)

Megoldás:

Végezzük el a következő átalakítást: $A = (a+1)^2 + (b-2)^2 + 1$

(5 pont)

Mivel a négyzetes kifejezések legkisebb értéke 0, így az A értékének minimuma 1 lesz.

(3 pont)

Ez az $a = -1$ és $b = 2$ esetén teljesül.

(2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Az ABC derékszögű háromszögben a BDC egyenlőszárú háromszög szárai $BD = DC = 3\ cm$ hosszúak. A BDA háromszög szintén egyenlőszárú, ahol a szárak: $BA = DA$. Határozzuk meg a háromszög BC oldalának hosszát!

(12 pont)

Megoldás:

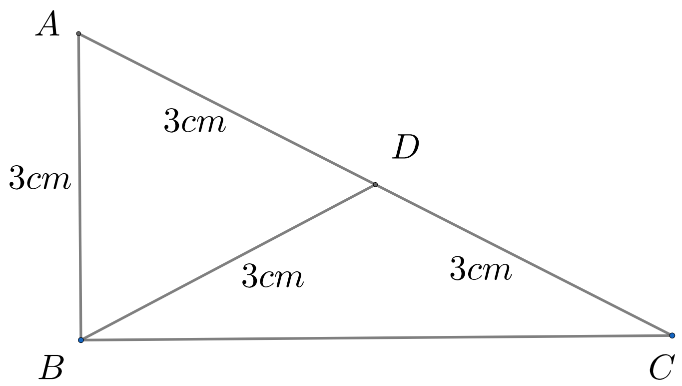
Mivel BDC háromszög egyenlőszárú, ezért BC oldalának felezőmerőlegese átmegy a D ponton. Továbbá a BC oldal felezőmerőlegese illeszkedik a háromszög köré írt kör középpontjára is, ami az átfogó felezőpontja.

Vagyis $DC = BD = AD = 3\ cm.$

(4 pont)

Mivel BAD háromszög egyenlő szárú, ezért: $BA = DA = 3cm.$

(2 pont)



Az ABC derékszögű háromszögben Pitagorász tételét felírva:

$$3^2 + BC^2 = 6^2$$

(3 pont)

Ez alapján $BC = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2\ cm$ adódik.

(3 pont)

Összesen: 12 pont

3. Egy szabályos n-szög alapú egyenes hasáb lapátlóinak száma 10-zel nagyobb, mint a testátlók száma. Határozzuk meg az n értékét!

(14 pont)

Megoldás:

A lapátlók számát az alaplap, fedőlap és az oldallapok átlói számának összege adja. Ezek száma: $2 \cdot \frac{n(n-3)}{2} + 2n = n(n-3) + 2n$

(4 pont)

A testátlók száma: $n(n-3)$

(4 pont)

A feladat feltételei alapján:

$$n(n-3)+2n=n(n-3)+10$$

(2 pont)

Ezt megoldva

$$n=5$$

adódik.

(2 pont)

Így a hasáb egy szabályos ötszögalapú hasáb lesz, melynek összesen $5+5+10=20$ lapátlója, és 10 testátlója van, amely eleget tesz a feladat feltételeinek.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

4. Töltsük ki a táblázat hiányzó mezőit úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban ugyanannyi legyen a számok összege!

(14 pont)

Megoldás:

A táblázatot töltsük ki az ábrának megfelelően. Jelöljük a második sor első elemét x-szel. Az összeg így minden oszlopban és sorban, valamint az átlók mentén $x+34$ lesz.

x+7		x+13
x	20	14
1		7

(2 pont)

Ezt figyelembe véve, jobb felső sarokba $x+13$, a jobb alsó sarokba 7, a bal felső sarokba pedig $x+7$ kerül.

(2 pont)

Az első oszlop és a második sorban található számok összege egyenlő, így:

$$x+7+x+1=x+20+14$$

(4 pont)

Az egyenlet megoldása: $x=26$

(2 pont)

Ez alapján a táblázat kitölthető:

33	-12	39
26	20	14
1	52	7

(4 pont)

Összesen: 14 pont

5. Egy sorozat első tagja 2, és a második tagtól kezdve minden szám a két szomszédja szorzatával egyenlő. Adjuk meg a sorozat 2018. tagját, ha az ötödik tag 4.

(16 pont)

Megoldás:
Jelölje a sorozat második tagját *x*. Így az első 7 tagja a következőképpen alakul:

$$2, x, \frac{x}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{2}{x}, 2, \ldots$$

(4 pont)

Az ötödik tag alapján:

$$\frac{1}{x} = 4$$

azaz

$$x = \frac{1}{4}$$

(4 pont)

Így a sorozat első nyolc tagja:

$$2, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 4, 8, 2, \frac{1}{4}, \ldots$$

(4 pont)

Látható, hogy a hatodik tag után a sorozat elemei ismétlődnek. Mivel $2018 = 336 \cdot 6 + 2$, így a 2018. tag a 2. taggal egyezik meg, azaz $\frac{1}{4}$ lesz.

(4 pont)

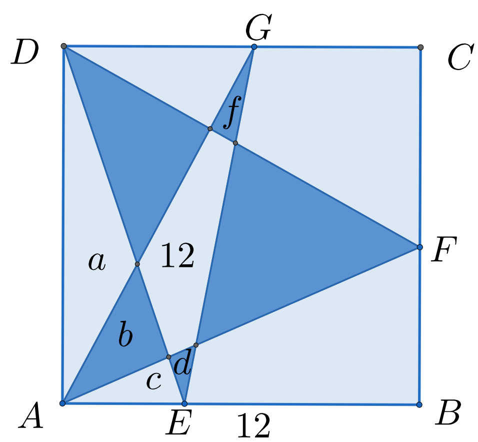
Összesen: 16 pont

6. Az ábrán látható négyzet oldala 12 cm, az E, F és G pontok az oldalán tetszőlegesek, a belsejében megjelölt ötszög területe 12 cm^2. Határozzuk meg a sötétre színezett terület nagyságát!

(16 pont)

Megoldás:
Jelöljük az ábrának megfelelően az alábbi háromszögek területeit!

(2 pont)



Mivel a négyzet területe 144 cm^2, ezért $t_{AFD} = 72\ cm^2$.

(2 pont)

A $t_{AED} = t_{AEG}$ egyenlőségből adódik, hogy:

$$a + b + c = b + c + d + f + 12$$
$$a = d + f + 12$$

(4 pont)

Így a kérdéses *T* területet úgy adódik, ha az *AFD* háromszög területéből kivonjuk az *a*, a *12* valamint hozzáadjuk az *e* és *f* nagyságú területeket.

(2 pont)

Ezek alapján:

$$T = 72 - 12 - a + d + f =$$
$$72 - 12 - (d + f + 12) + d + f =$$
$$72 - 12 - 12 = 48$$

A keresett terület nagysága tehát $48\ cm^2$.

(6 pont)
Összesen: 16 pont

7. Meg lehet-e adni öt különböző pozitív prímszámot úgy, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?

(18 pont)

Megoldás:
Megmutatjuk, hogy nem lehet a feltételeknek megfelelően megadni az öt prímszámot.

(2 pont)

A prímszámok között nem szerepelhet a 2, hiszen másik két páratlan prímmel összeadva páros számot kapnánk eredményül, ami nem lehet prím.

(4 pont)

Vizsgáljuk a prímszámokat a 6-os maradékuk szerint. A 3 kivételével mindegyik prím vagy $6k+1$ vagy $6l-1$ alakú. Ha öt olyan prímszámot adnánk meg, melyek között nem szerepel a 3, akkor a skatulyaelv szerint valamelyik típusból lenne három melyek összege:

$$6a+1+6b+1+6c+1=6(a+b+c)+3$$

vagy

$$6a-1+6b-1+6c-1=6(a+b+c)-3$$

Lenne, azaz mindkét esetben osztható lenne 3-mal.

(6 pont)

Abban az esetben, ha az öt szám között szerepel a 3, akkor mindkét típusból továbbra is csak 2-2 lehetne választható. Ekkor azonban a 3, hoz mindegyik típusból 1-1 számot hozzáadva:

$$3+6a-1+6b+1=6(a+b)+3$$

szintén 3-mal osztható számot kapnánk.
Más eset nem lehetséges, így az öt prímszám valóban nem választható ki.

(6 pont)
Összesen: 18 pont

Megoldások

(10. osztály)

1. Tudjuk, hogy $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq\frac{1+1}{2+3}$. Vajon vannak- e olyan *a, b, c, d* pozitív valós számok, melyekre teljesül az $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ egyenlőség?

(10 pont)

Megoldás:

Könnyen látható, hogy

$$\frac{a}{b}>\frac{a}{b+d}$$

és

$$\frac{c}{d}>\frac{c}{b+d}$$

(4 pont)

Az egyenlőtlenségeket összegezve

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}>\frac{a+c}{b+d}$$

adódik.

(4 pont)

Tehát nem léteznek olyan pozitív valós számok, melyre az egyenlőség teljesül.

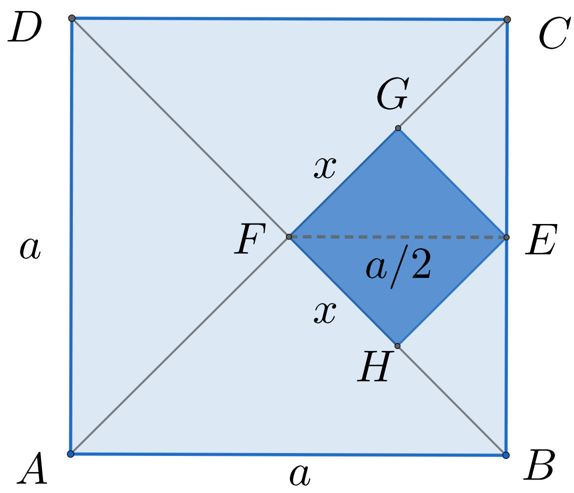
(2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Az ábrán látható négyzet területének hányadrészét fedi le a belsejében található satírozott négyzet?

(12 pont)

Megoldás:



Jelöljük a négyzet oldalának hosszát *a*-val a satírozott négyzet oldalának a hosszát *x*-el.

A belső négyzet átlójának hossza $\frac{a}{2}$.

(2 pont)

Az FEG derékszögű háromszögben:

$$x^2+x^2=\frac{a^2}{4}$$

Ebből $x=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ adódik.

(5 pont)

Így a területek aránya:

$$A=\frac{x^2}{a^2}=\frac{\frac{a^2}{8}}{a^2}=\frac{1}{8}$$

(5 pont)

Természetesen, ha valaki átdarabolással hozza ki a megfelelő arányt, akkor kapja meg a maximális pontot.

Összesen: 12 pont

3. A derékszögű koordináta-rendszerben kiválasztunk n rácspontot, melyek koordinátai egész számok. Legfeljebb mekkora lehet az n értéke, ha nincs közöttük olyan pontpár, hogy a pontok által meghatározott szakasz felezőpontja is rácspont, (azaz a felezőpont mindkettő koordinátája egész szám).

(12 pont)

Megoldás:

Két pont által meghatározott szakasz felezőpontjának koordinátáit a azok számtani közepe adja. $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontja $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

(2 pont)

Ez akkor esik rácspontba, ha a megfelelő koordináták azonos paritásúak.

(2 pont)

A rácspontok paritás szerint négyfélék lehetnek:

$$(páros; páros), (páros; páratlan), (páratlan; páros), (páratlan; páros)$$

(4 pont)

Ezek szerint, ha egy ötödik pontot választunk, akkor valamelyik típusból legalább kettő lesz, így ezek által meghatározott szakasz felezőpontja is rácspont lesz.
Vagyis a feltételeknek megfelelően legfeljebb 4 pont választható ki.
Ezek lehetnek pl. a következők: $A(2; 2), B(1; 2), C(2; 1), D(1; 1)$.

(4 pont)

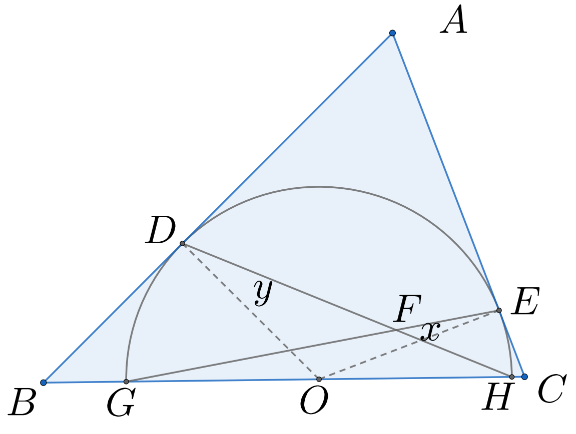
Összesen: 12 pont

4. Az ábrán látható ABC háromszög BC oldalára olyan félkört rajzoltunk, amely érinti az AB és AC oldalakat a D és E pontokban. A GH átmérő végpontjait összekötve a D és E érintési pontokkal a két szakasz az F pontban metszi egymást. Ha a bejelölt GFH és DAE szögek egyenlők egymással, akkor mekkorák ezek a szögek?

(14 pont)

Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit!



$$AEF\measuredangle = 90° - x$$
$$ADF\measuredangle = 90° - y$$

és $DFE\measuredangle = GFC\measuredangle = 180° - (x + y)$

(5 pont)

A $DFEA$ négyszögben, felhasználva a $DFE\measuredangle = DAE\measuredangle$ egyenlőséget, a szögek összegét felírva:

$$360° = 90° - x + 90° - y + 2 \cdot (180° - (x + y))$$

(3 pont)

Ebből

$$x + y = 60°$$

adódik.

(4 pont)

Így a keresett szögek nagysága: $GFH\sphericalangle = DAE\sphericalangle = 180° - 60° = 120°$

(2 pont)

Összesen: 14 pont

5. Józsi bácsi szombat reggel szilvát árult a piacon. Az első vevő megvette a szilvák ötödét és még 1 kg-ot 440 Ft/kg-ért, a második vevő 1 kg híján megvette a maradék harmadát 550 Ft/kg egységáron, a harmadik vevő pedig elvitte a maradékot, de csak 220 Ft-ot fizetett kilogrammjáért. Józsi bácsi így átlagosan 341 Ft-ot kapott kilogrammonként a szilvájáért. Melyik vevőtől kapta a legtöbb bevételt az árusítás során?

(16 pont)

Megoldás:

Először határozzuk meg mennyi szilvát vitt a piacra Józsi bácsi. Jelöljük ennek a mennyiségét *x*-szel!

A feladat feltételei alapján az összes bevétele az egyes vevők esetében összegezve:

$$\left(\frac{x}{5}+1\right)440+\left(\left(\frac{4}{5}x-1\right)\cdot\frac{1}{3}-1\right)550+\left(x-\frac{x}{5}-1-\left(\left(\frac{4}{5}x-1\right)\cdot\frac{1}{3}-1\right)\right)220$$

Az átlagár alapján ez egyenlő $x \cdot 341$-gyel.

(6 pont)

Az egyenlőséget felírva és azt rendezés után megoldva:

$$\left(\frac{x}{5}+1\right)440+\left(\frac{4}{15}x-\frac{4}{3}\right)550+\left(\frac{8}{15}x+\frac{1}{3}\right)220=341\cdot x$$

$$352\cdot x-220=341\cdot x$$

$$x=20$$

adódik. Azaz Józsi bácsi 20 kg szilvát adott el.

(4 pont)

Ez alapján az egyes vevők által megvett szilva mennyisége rendre: 5 kg, 4 kg, és 11 kg volt.

(3 pont)

Ezért rendre 2200 Ft, 2200 Ft, 2420 Ft összeget fizettek.

(2 pont)

Így a legnagyobb bevétel 2420 Ft a harmadik vevőtől származott.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

6. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ kifejezés értékét, ha $x = 2018$, $y = -2018$ és $z = 1$?

(18 pont)

Megoldás:

A kifejezésnek nincs értelme $x = y, y = z$ vagy $x = z$ esetben, de ez a megadott értékek esetén nem teljesül.

(2 pont)

A kifejezést hozzuk közös nevezőre, majd végezzük el az alábbi összevonásokat:

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{x^2z-x^2y+y^2x-y^2z+z^2y-z^2x}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

(4 pont)

A számláló tagjait csoportosítva és szorzattá alakítva:

$$\frac{xz(x-z)+y^2(x-z)-y(x-z)(x+z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{-(z-x)\big(xz+y^2-y(x+z)\big)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{-\big(xz+y^2-y(x+z)\big)}{(x-y)(y-z)}=$$

(6 pont)

A számláló ismét szorzattá alakítható:

$$\frac{-xz-y^2+yx+yz}{(x-y)(y-z)}=$$

$$\frac{x(y-z)-y(y-z)}{(x-y)(y-z)}=$$

$$\frac{(x-y)(y-z)}{(x-y)(y-z)}=1$$

(4 pont)

A kifejezés értéke minden értelmezési tartományába eső értékre 1 lesz.

(2 pont)

Összesen: 18 pont

7. Adott a síkon 10 általános helyzetű egyenes, nincs közöttük két párhuzamos és bármely metszésponton csak két egyenes halad át. Véletlenszerűen kiválasztunk a keletkező egyenesdarabok - szakaszok és félegyenesek - közül kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenesdarab azonos típusú lesz, azaz mindegyik szakasz vagy mindegyik félegyenes?

(18 pont)

Megoldás:

Minden egyenesen 9 metszéspont jön létre, így minden egyenesen 8 szakasz és 2 félegyenes keletkezik.

(4 pont)

Így a keletkező szakaszok száma: $10 \cdot 8 = 80$
A félegyenesek száma: $10 \cdot= 20$.
Összesen tehát 100 egyenesdarab jön létre.

(4 pont)

A szakaszok közük kettőt $\binom{80}{2} = 3160$ féleképpen választhatunk.
A félegyenesek közük kettő $\binom{20}{2} = 190$ féleképpen választható.
Így a kedvező esetek száma: 3350 lesz.

(6 pont)

Összesen $\binom{100}{2} = 4950$ féleképpen választhatunk ki egyenesdarabot.

(2 pont)

Így a keresett valószínűség: $P = \frac{3350}{4950} = \frac{67}{99} \approx 0{,}68$.

(2 pont)

Összesen 18 pont