Javítási útmutató
11. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. a) Ha $x \neq y$ és $x + \frac{4}{x} = y + \frac{4}{y}$, akkor mennyi lehet az *xy* szorzat értéke? ***(5 pont)***

Megoldás. Átrendezés után $x - y = \frac{4}{y} - \frac{4}{x}$, $x - y = \frac{4(x-y)}{xy}$, innen $xy(x-y) = 4(x-y)$.

3 pont

Mivel $x \neq y$,

1 pont

így $xy = 4$.

1 pont

b) Mennyi $x^3 + y^3$ értéke, ha $x + y = 5$, és $x + y + x^2y + xy^2 = 24$? ***(8 pont)***

Megoldás. $x + y + x^2y + xy^2 = (x+y)\cdot(1+xy) = 24.$

3 pont

Mivel $x + y = 5$, ezért $xy + 1 = 4{,}8$, vagyis $xy = 3{,}8$.

2 pont

$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 125 - 3 \cdot 3{,}8 \cdot 5 = 125 - 57 = 68.$

3 pont

2. Oldja meg a $\sqrt{1-x} + |x-2| + |x-3| = |x-4| + |x-5|$ egyenletet a valós számok körében. ***(10 pont)***

Megoldás. $\sqrt{1-x}$ miatt $x \leq 1$.

2 pont

Ha $x \leq 1$, akkor az abszolútértékek egyértelműen feloldhatók.

2 pont

Így az egyenlet az $\sqrt{1-x} + (2-x) + (3-x) = (4-x) + (5-x)$ alakot ölti.

2 pont

Innen $\sqrt{1-x} = 4$.

2 pont

A megoldás $x = -15$.

2 pont

3. Öt különböző pozitív egész számból álló minta átlaga 21. Mennyi lehet a medián értéke?

(13 pont)

Megoldás. Az öt szám összege $5 \cdot 21 = 105$.

2 pont

Öt különböző pozitív egész szám mediánja 3-nál kisebb nem lehet, mert közülük a harmadik szám legalább 3.

2 pont

A medián lehet 3, ha a számok 1, 2, 3, 4, 95.

1 pont

A medián értéke nem lehet nagyobb 33-nál. Ha mégis, akkor az öt szám lehetséges legkisebb értéke 1, 2, 34, 35, 36, ám ezek összege nagyobb 105-nél.

2 pont

A medián legnagyobb értéke lehet 33, ha a számok 1, 2, 33, 34, 35.

1 pont

A medián 3 és 33 között bármelyik szám lehet,

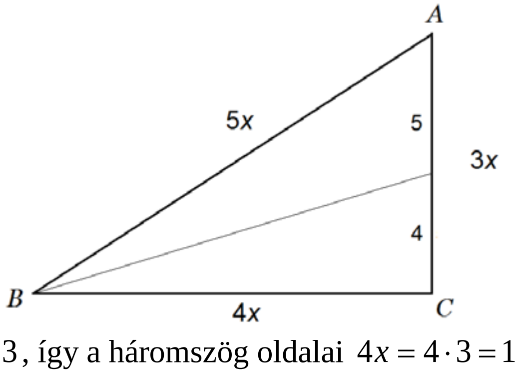
2 pont

például így: $1, 2, a, 34, 68 - a$, ahol $3 \leq a \leq 33$.

3 pont

4. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögének szögfelezője a szemközti oldalt 4 és 5 egység hosszú részekre osztja. Mekkora a háromszög területe? ***(13 pont)***

Megoldás. A szögfelezőtétel miatt a szögfelezővel szomszédos két háromszögoldal $4x$ és $5x$. A derékszögű háromszög másik befogója a Pitagorasz-tétel miatt $3x$.



$3x = 4 + 5 = 9$, tehát $x = 3$, így a háromszög oldalai $4x = 4 \cdot 3 = 12$ és $5x = 5 \cdot 3 = 15$.

A derékszögű háromszög oldalai 9, 12 és 15, a területe $t = \dfrac{9 \cdot 12}{2} = 54$ területegység.

Ha használja a szögfelezőtételt, arra adjunk ***5 pontot***.
Ha kiderül, hogy a háromszög oldalainak aránya 3:4:5, arra adjunk ***4 pontot***.
A háromszög oldalai 9, 12, 15, ez ***2 pont***.
A háromszög területe 54, ez ***2 pont***.

5. Egy háromszög oldalainak hossza a, b, c. Igazolja, hogy $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

(13 pont)

1. megoldás. A háromszög-egyenlőtlenség alapján $a < b + c,\ b < c + a,\ c < a + b$.

1+1+1=3 pont

Szorozzuk ezeket az egyenlőtlenségeket rendre a, b, c-vel:
$a^2 < ab + ca, b^2 < bc + ab, c^2 < ca + bc$. ***2+2+2 = 6 pont***

Adjuk össze ezeket: $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$. ***4 pont***

2. megoldás. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $|a - b| < c, |b - c| < a, |c - a| < b$.

1+1+1=3 pont

Ezért igazak a következő egyenlőtlenségek:

$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2,$$
$$b^2 - 2bc + c^2 < a^2,$$
$$c^2 - 2ca + a^2 < b^2.$$

2+2+2=6 pont

Ezek összege: $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) < a^2 + b^2 + c^2$. ***2 pont***

Átrendezés után kapjuk az $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ egyenlőtlenséget. ***2 pont***

6. Az asztalon fekvő nyolc számkártyán az $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9$ számokat látjuk. A lapokat megfordítjuk, majd valamilyen sorrendben a lapoknak erre az oldalára is felírjuk ugyanezt a nyolc számot. Ezután kiszámoljuk mindegyik lapnál a rajta lévő két szám összegét.

Lehet-e ennek a nyolc számnak a szorzata **a)** 0; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 16?

(16 pont)

Megoldás. A szorzat nem lehet 0, mert a nyolc szám között nincs olyan, melynek az ellentettjét is látjuk.

Helyes állítás ***1 pont***, indoklás ***3 pont***. Összesen ***4 pont.***

A nyolc szám között öt páratlan és három páros, emiatt az öt páratlan szám mögé nem kerülhet csupa páros szám. Legalább két páratlan szám mögött is páratlan szám lesz. Tehát a kártyákon számolt összegek között lesz két páros, így a szorzat 4-gyel osztható. A szorzat nem lehet 2.

Helyes állítás ***1 pont***, indoklás ***3 pont***. Összesen ***4 pont.***

A szorzat lehet 4, ha a számpárok: $(1, -2)$, $(-2, 1)$, $(-3, 4)$, $(4, -3)$, $(-5, 7)$, $(7, -5)$, $(-8, 9)$, $(9, -8)$.

Helyes állítás ***1 pont***, indoklás ***3 pont***. Összesen ***4 pont.***

A szorzat lehet 16, ha a számpárok: $(1, -2)$, $(-2, 1)$, $(-3, 7)$, $(7, -3)$, $(-5, 4)$, $(4, -5)$, $(-8, 9)$, $(9, -8)$.

Helyes állítás ***1 pont***, indoklás ***3 pont***. Összesen ***4 pont.***

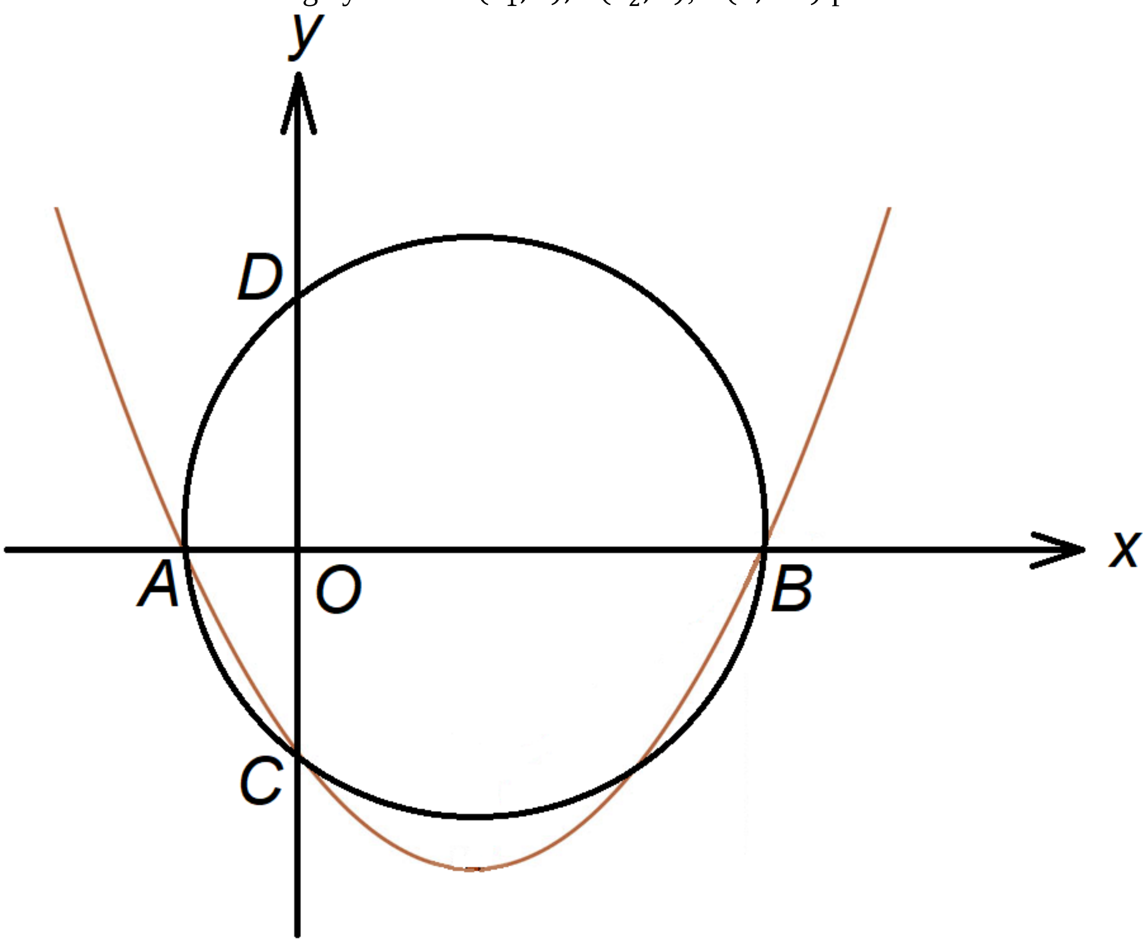
7. Igazolja, hogy az $f(x) = x^2 - ax - 1$ másodfokú függvény grafikonja tetszőleges a valós paraméter esetén három pontban metszi a koordinátatengelyeket. Mutassa meg, hogy erre a három pontra illeszkedő körön van egy olyan negyedik pont, amely illeszkedik mindegyik körre. ***(22 pont)***

Megoldás. Az $f(x) = x^2 - ax - 1$ parabolának két zérushelye van, mert az $a^2 + 4$ diszkrimináns az a paraméter minden értékére pozitív. ***4 pont***

Az $f(x) = x^2 - ax - 1$ parabola az y-tengelyt a -1 pontban metszi. ***2 pont***

A két zérushely x_1 és x_2. A gyökök és együtthatók közti összefüggés miatt $x_1 \cdot x_2 = -1$, ezért $x_1 < 0 < x_2$. ***4 pont***

A parabola a koordinátatengelyeket az $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$, $C(0; -1)$ pontokban metszi.



Helyes ábrára ***2 pont.***

Az *ABC* háromszög köré írt kör az y-tengelyt metszi még a $D(0; d)$ pontban.

A szelőszakaszokra vonatkozó tétel miatt $DO \cdot CO = AO \cdot BO$, azaz $d \cdot 1 = |x_1| \cdot |x_2|$. ***6 pont***

Mivel $x_1 \cdot x_2 = -1$, ezért $|x_1| \cdot |x_2| = 1$, tehát $d \cdot 1 = 1$, $d = 1$. ***2 pont***

Tehát az *ABC* háromszög köré írt körök, függetlenül az a paramétertől, mindig átmennek a $D(0; 1)$ ponton. ***2 pont***

Javítási útmutató
12. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. a) Az *x*, *y* egész számokra $x^4+\frac{100}{y^4}=\frac{101x^2}{y^2}$ teljesül. Mennyi lehet az *xy* szorzat értéke?

(6 pont)

Megoldás. Szorozzunk y^4-nel: $x^4y^4+100=101x^2y^2$.

$x^4y^4-101x^2y^2+100=0$,

$(x^2y^2-1)(x^2y^2-100)=0$. ***2 pont***

Tehát $x^2y^2=1$, vagy $x^2y^2=100$. Ezért $xy=\pm1$ vagy $xy=\pm10$. ***2 pont***

Ezeket az értékeket xy felveszi: $xy=1$, ha $x=1$, $y=1$; $xy=-1$, ha $x=1, y=-1$; $xy=10$, ha $x=1$, $y=10$; $xy=-10$, ha $x=1, y=-10$. ***2 pont***

b) Ha $3^a=4^b=36$, akkor mennyi $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ értéke? ***(7 pont)***

Megoldás: Ha $3^a=36$, akkor $3=36^{\frac{1}{a}}$, és $9=36^{\frac{2}{a}}$. Ha $4^b=36$, akkor $4=36^{\frac{1}{b}}$. ***2 pont***

Szorozzuk össze a $9=36^{\frac{2}{a}}$ és $4=36^{\frac{1}{b}}$ egyenlőségeket: $36=36^{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}$. ***3 pont***

Tehát $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$. ***2 pont***

2. Öt pozitív egész számból álló minta átlaga 11, mediánja 10, a módusza 7. Mekkora a minta legnagyobb terjedelme? ***(9 pont)***

Megoldás. Az öt szám összege $5\cdot11=55$. ***1 pont***

A medián 10, a módusz 7, így az első három szám 7, 7, 10. ***3 pont***

Az utolsó két szám *a* és *b*, összegük $55-(7+7+10)=31$. ***1 pont***

Ez a két szám különböző és nagyobb 10-nél. Tehát $a+b=31$ és $10<a<b$. Akkor legnagyobb *b*, ha *a* a legkisebb: $a=11$, $b=20$. Az *a* azért nem lehet 10, mert akkor két módusz is lenne. ***2 pont***

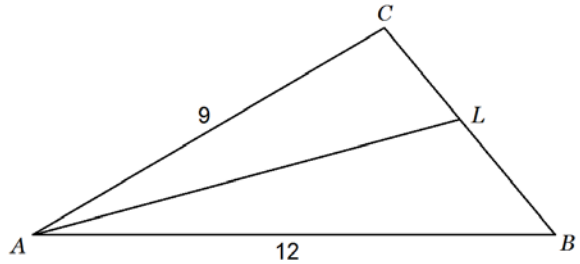
Az öt szám: 7, 7, 10, 11, 20. A minta lehetséges legnagyobb terjedelme $20-7=13$. ***2 pont***

3. Az ABC háromszög két oldala $AB = 12$ és $AC = 9$, továbbá az AL szögfelező. Mekkora az ABC háromszög területe, ha az ACL háromszög területe $\frac{90}{7}$ területegység? ***(10 pont)***

Megoldás. A szögfelezőtétel szerint: $\frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12}$. *3 pont*

$\frac{CL}{BL} = \frac{T_{ACL}}{T_{ABL}}$, mert ugyanaz a magasság tartozik a háromszögek CL és BL oldalaihoz. *3 pont*

Tehát $\frac{T_{ACL}}{T_{ABL}} = \frac{9}{12}$, $\frac{90/7}{T_{ABL}} == \frac{9}{12}$, így $T_{ABL} = \frac{120}{7}$. *2 pont*



$T_{ABC} = T_{ACL} + T_{ABL} = \frac{90}{7} + \frac{120}{7} = \frac{210}{7} = 30$ területegység. *2 pont*

4. Mekkora az $|x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4|$ kifejezés legnagyobb értéke, ahol $|x_i| \leq 1$, ha $i = 1, 2, 3, 4$? ***(16 pont)***

Megoldás. $|x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4| = |x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 - x_4)|$ *3 pont*
$|x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 - x_4)| \leq |x_1(x_3 + x_4)| + |x_2(x_3 - x_4)|$, *2 pont*
$|x_1(x_3 + x_4)| + |x_2(x_3 - x_4)| = |x_1| \cdot |x_3 + x_4| + |x_2| \cdot |x_3 - x_4| \leq |x_3 + x_4| + |x_3 - x_4|$. *3 pont*

Tehát $|x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4| \leq |x_3 + x_4| + |x_3 - x_4|$.
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_3 \geq x_4 \geq 0$. *2 pont*
Ekkor $|x_3 + x_4| + |x_3 - x_4| = (x_3 + x_4) + (x_3 - x_4) = 2x_3$. *2 pont*
Ezek miatt $|x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4| \leq 2x_3 \leq 2$. *2 pont*
Az $|x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4|$ kifejezés értéke legfeljebb 2, és lehet ennyi az értéke, ha $x_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. *2 pont*

5. Egy kvalifikációs versenyen 75 asztaliteniszező vett részt. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott, és a mérkőzés valamelyik játékos győzelmével zárult. A verseny végén volt 25 olyan játékos, akik közül mindenki legfeljebb n-szer veszített. Mennyi az n lehetséges legkisebb értéke? ***(16 pont)***

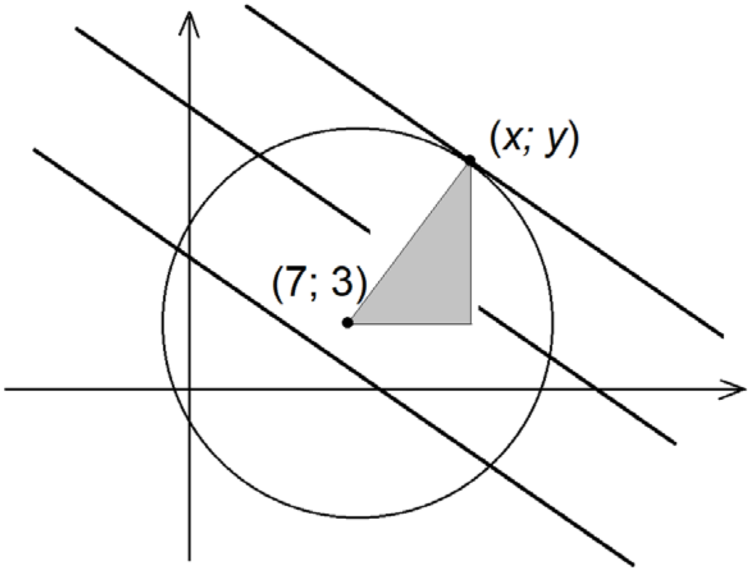
Megoldás. A 25 játékos egymás között $25 \cdot 12$ mérkőzést játszott, és ezeknek a mérkőzéseknek összesen $25 \cdot 12$ vesztese van. Ezért a 25 játékos mindegyikének nem lehet 11 vagy annál kevesebb veresége. Tehát n értéke legalább 12. *8 pont*
Elérhető, hogy a 25 játékos mindegyikének 12 veresége legyen. Helyezzük el a 75 játékost egy körön, a kiválasztott 25 játékos legyen piros, a többi kék. Egy piros és egy kék játékos mérkőzésén mindig a piros győz, és minden piros az óramutató járása szerint utána álló 12 játékost legyőzi, míg az előtte lévő 12 pirostól kikap. *8 pont*

6. Ha az x és y számokra $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$ teljesül, akkor mennyi $3x + 4y$ legnagyobb értéke? ***(16 pont)***

1. megoldás. Az $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$ összefüggés egy kör egyenlete.

Átalakítások után kapjuk az $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 8^2$ egyenletet. A kör középpontja $(7,3)$, sugara 8 egység. ***4 pont***

A $3x + 4y = c$ egyenesek közül azt az egyenest keressük, amely „felülről” érinti a kört, és az (x,y) érintési ponthoz tartozó $3x + 4y$ érték lesz a keresett legnagyobb érték. ***2 pont***



Az érintő merőleges az érintési pontot és a kör középpontot összekötő körsugárra. ***2 pont***

A körsugár meredeksége $\frac{4}{3}$. ***2 pont***

Az ábrán a befestett derékszögű háromszög hasonló a 3, 4, 5 oldalú háromszöghöz, és az átfogója 8 egység. Így $x = 7 + \frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{59}{5}$ és $y = 3 + \frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{47}{5}$. ***4 pont***

Ezen (x,y) értékekre $3x + 4y = 3 \cdot \frac{59}{5} + 4 \cdot \frac{47}{5} = \frac{177}{5} + \frac{188}{5} = 73$. ***2 pont***

2. megoldás. Az $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$ összefüggés egy kör egyenlete.

Átalakítások után kapjuk az $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 8^2$ egyenletet. A kör középpontja $(7,3)$, sugara 8 egység. ***4 pont***

A $3x + 4y = c$ egyenesek közül azt az egyenest keressük, amely „felülről” érinti a kört, és ez a c érték lesz $3x + 4y$ keresett legnagyobb értéke. ***2 pont***

A $3x + 4y = c$ egyenes és a $(7,3)$ középpont távolsága 8 kell legyen, ekkor érinti az egyenes a kört. ***4 pont***

Az $ax + by - c = 0$ egyenes és a $P(x_0;\ y_0)$ pont távolsága $d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

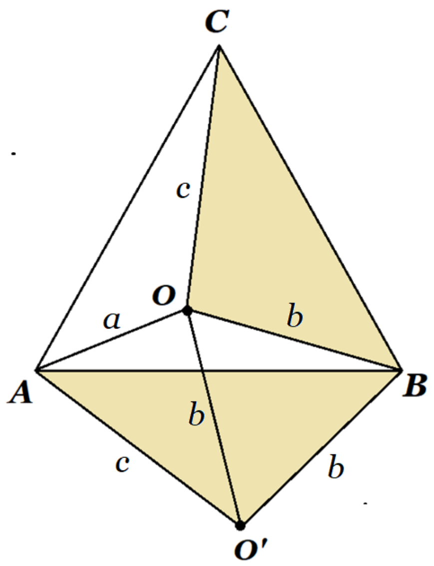
Esetünkben $8 = \frac{|3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 - c|}{\sqrt{3^2+4^2}}$. azaz $8 = \frac{|33-c|}{5}$. $40 = |33 - c|$, tehát $c = -7$ vagy $c = 73$. ***4 pont***

A keresett maximális érték 73. ***2 pont***

3. megoldás. Legyen k a keresett legnagyobb érték, $3x+4y=k$.
Innen $y=\frac{k-3x}{4}$, amit helyettesítsünk az $x^2+y^2=14x+6y+6$ egyenletbe. ***2 pont***
A $16x^2+(k-3x)^2=224x+24(k-3x)+96$ egyenletet kapjuk. ***2 pont***
Az a kérdés, mennyi a k paraméter legnagyobb értéke, ha az egyenletnek van valós megoldása. ***2 pont***
Az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív: $(3k+76)^2-25(k^2-24k-96)\geq 0$. ***4 pont***
Átalakítások után: $(k-73)(k+7)\leq 0$. ***2 pont***
A diszkrimináns $-7\leq k\leq 73$ esetén nemnegatív. ***2 pont***
Ezért a k paraméter lehetséges legnagyobb értéke 73. ***2 pont***

7. Az *ABC* szabályos háromszög belsejében felvettünk egy *O* pontot, melyre $AO^2+BO^2=CO^2$ teljesül. Mekkora az $AOB\angle$? ***(20 pont)***

Megoldás. A *BOC* háromszöget forgassuk el *B* körül 60°-kal, így kapjuk a *BO'A* háromszöget.



6 pont

Az elforgatás miatt $AO'=OC$. ***2 pont***

A *BO'O* háromszög egyenlő szárú, $BO=BO'$ és a szárszög 60°, így a háromszög szabályos. Tehát $OO'=BO$. ***2 pont***

Az egyenlőségek alapján az $AO^2+BO^2=CO^2$ összefüggésből az $AO^2+OO'^2=AO'^2$ összefüggést kapjuk, tehát az *AO'O* háromszög derékszögű. ***4 pont***

Így $AOB\angle=AOO'\angle+O'OB\angle=90°+60°=150°$. ***2 pont***