

Javítási útmutató

11. osztály, szakgimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.

1. Oldja meg a $\sqrt{x} = 1 - x$ egyenletet a valós számok körében. (10 pont)

1. megoldás. Az $a = \sqrt{x}$ helyettesítéssel az egyenletünk: $a = 1 - a^2$, azaz $a^2 + a - 1 = 0$. 2 pont

Az egyenlet gyökei: $a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ és $a_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

$a = \sqrt{x} \geq 0$. 2 pont

Ezért csak a $\sqrt{x} = a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ eset ad megoldást. 2 pont

Ebből $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

2. megoldás. Értelmezési tartomány $x \geq 0, 1 - x \geq 0$.

Tehát az egyenlet megoldásait $0 \leq x \leq 1$ feltétel mellett keressük. 2 pont

Négyzetre emelve az eredeti egyenletet: $x = (1 - x)^2, x^2 - 3x + 1 = 0$. 2 pont

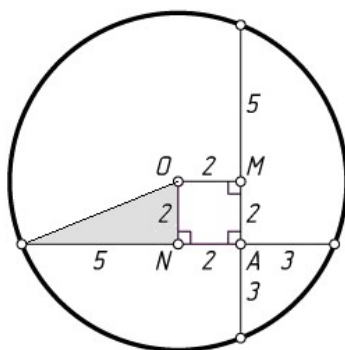
Ennek az egyenletnek a megoldása: $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ és $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

Az értelmezési tartománynak x_1 nem eleme. 2 pont

Ezért az egyenlet megoldása $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

2. Egy körben két egymásra merőleges húr mindegyike a másikat 3 és 7 hosszúságú részekre osztja. Mekkora a kör sugara? (10 pont)

Megoldás. A kör O középpontjából a húrra bocsátott merőleges felezi a $7 + 3 = 10$ hosszú húr.



Ezért a befestett derékszögű háromszög befogói 5 és 2, az átfogója a kör sugara:

$$r = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Egy jó ábra 2 pont, a befogók 2+2=4 pont, Pitagorasz-tétel 2 pont, helyes eredmény 2 pont.

3. Mennyi az értéke?

(A) Ha $3x + 4y = 2019$ és $4x + 3y = 2020$, akkor mennyi $x + y$ értéke?

(B) Ha $12a + 10b = 120$, akkor mennyi $\frac{a}{5} + \frac{b}{6}$ értéke?

(C) Ha $(x + 2)(x^2 + 3x + 2) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, akkor mennyi $a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ értéke?

(D) Ha $a + \frac{1}{a} = 3$, akkor mennyi $a^2 + \frac{1}{a^2}$ értéke?

(E) Az x, y, z pozitív számokra $x(x + y + z) = 26$, $y(x + y + z) = 27$, $z(x + y + z) = 28$ teljesül. Mennyi $x + y + z$ értéke?

(12 pont)

Megoldás. (A) $(3x + 4y) + (4x + 3y) = 4039$, azaz $7(x + y) = 7 \cdot 577$,
tehát $x + y = 577$.

(Az egyenletrendszer megoldásai $x = 289$, $y = 288$.)

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(B) A $12a + 10b = 120$ egyenlőséget osszuk el 60-nal: $\frac{a}{5} + \frac{b}{6} = 2$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(C) A műveletek elvégzése után is leolvasható a válasz, de gyorsabban célba érünk, ha $x = 1$ -et helyettesítünk a kifejezésbe:

$$(1 + 2)(1^2 + 3 \cdot 1 + 2) = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0,$$

$$\text{azaz } a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \cdot 6 = 18.$$

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(D) Ha $a + \frac{1}{a} = 3$, akkor $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 9$, azaz $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9$, tehát $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(E) Adjuk össze a három egyenlőtlenséget, így az $(x + y + z)^2 = 81$ egyenlőséget kapjuk, azaz $x + y + z = 9$.

3+1=4 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

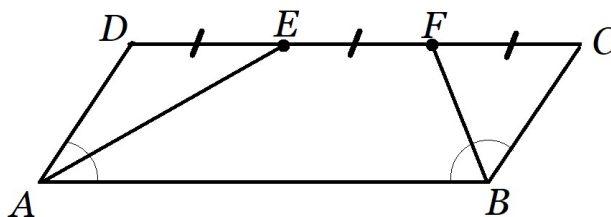
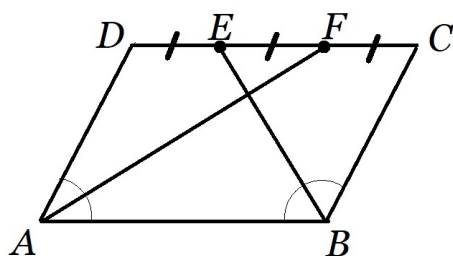
4. Az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsából induló szögfelezők a szemközti oldalt három egyenlő részre osztják. Mekkora lehet a paralelogramma rövidebb oldala, ha a kerülete 80 egység? (19 pont)

Megoldás. Az A csúcsnál lévő szöget a szögfelező két egyenlő részre osztja: $FAB\angle = DAF\angle$. Az A és F csúcsnál lévő szögek váltószögek, tehát $FAB\angle = DFA\angle$.

Ezek miatt $DAF\angle = DFA\angle$.

Tehát a DAF háromszög egyenlő szárú: $DA = DF$.

Ugyanígy $CB = CE$.



Az első ábrán $DC = 3x$, $DA = DF = 2x$.

A paralelogramma kerülete $80 = 2(2x + 3x)$, innen $x = 8$, és $AD = 2x = 16$.

A második ábrán $DC = 3x$, $DA = DE = x$.

A paralelogramma kerülete $80 = 2(x + 3x)$, innen $x = 10$, és $AD = x = 10$.

Egy jó ábra 2 pont.

Az egyenlő szárú háromszög felismerése és indoklása 2+2=4 pont.

Helyes egyenlet 2 pont.

Helyes eredmény 2 pont.

Ez így 10 pont. Ha a másik lehetőséget is helyesen megoldja, az 9 pont.

Teljes megoldás 10+9=19 pont.

5. Felírtam a táblára négy egész számot (a számok között lehetnek megegyezők is), s közülük az összes lehetséges módon véve hármát-hármát, kiszámoltam azok összegét, majd ezeket összeadtam, az eredmény: 51. A felírt négy szám szorzata 216.

Mi lehet a táblára írt négy szám? (12 pont)

Megoldás. A négy gondolt szám: a, b, c, d .

Tudjuk, hogy $(a + b + c) + (a + b + d) + (a + c + d) + (b + c + d) = 51$,

azaz $3(a + b + c + d) = 51$, $a + b + c + d = 17$, továbbá $a \cdot b \cdot c \cdot d = 216$. Vizsgáljuk a 216 előállítását négy olyan egész szám szorzataként, amikor közöttük 1 vagy 3 páratlan szám van, hiszen a négy szám összege páratlan.

Megoldások: $\{8, 3, 3, 3\}$, $\{6, 6, 2, 3\}$, $\{18, 3, -2, -2\}$.

A négy szám összege 17: 2 pont; a számhármások megtalálása 3+3+4 pont (a 18, 3, -2, -2 a 4 pontos).

6. Határozza meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 - mx + m - 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyökének kétszerese legyen. (14 pont)

1. megoldás. $D = (-m)^2 - 4(m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$, és $m \neq 2$ esetén az egyenletnek két gyöke van. 2 pont

A gyökök $x_{1,2} = \frac{m \pm (m-2)}{2}$, azaz $x_1 = m - 1$, $x_2 = 1$. 4 pont

Ha $x_1 = 2x_2$, azaz $m - 1 = 2$,
akkor $m = 3$. 2 pont

Ha $x_2 = 2x_1$, $1 = 2(m - 1)$,
akkor $m = \frac{3}{2}$. 2 pont

2. megoldás. $D = (m - 2)^2 \geq 0$, és ha $m \neq 2$, akkor az egyenletnek két gyöke van. 2 pont

A gyökök és együtthatók közti összefüggés miatt $x_1 + x_2 = m$ és $x_1 \cdot x_2 = m - 1$. 4 pont

Mivel $x_1 = 2x_2$, ezért $2x_2 + x_2 = m$, $x_2 = \frac{m}{3}$. 2 pont

Továbbá $x_1 \cdot x_2 = m - 1$, azaz $\frac{2m}{3} \cdot \frac{m}{3} = m - 1$, $2m^2 - 9m + 9 = 0$. 2 pont

Így $m = 3$, vagy $m = \frac{3}{2}$. 2+2=4 pont

7. A p , q , r prímekre $p^3 - q^3 = 11r$ teljesül. Melyek ezek a prímek? (23 pont)

Megoldás. Mind a három prím nem lehet páratlan, mert ekkor a bal oldal páros, a jobb oldal páratlan. 2 pont

Tehát van páros szám a prímek között, és csak az egyik lehet páros. 2 pont

Két lehetőség van: $r = 2$ vagy $q = 2$. 2 pont

Ha $r = 2$, akkor $p^3 - q^3 = 11 \cdot 2$, azaz $(p - q) \cdot (p^2 + pq + q^2) = 2 \cdot 11$. 2 pont

Ha $p - q = 1$, akkor $p = 3$, $q = 2$, ami nem megoldás. 2 pont

Emiatt $p - q = 2$, $p = q + 2$, és így a másik tényező $p^2 + pq + q^2 = 3q^2 + 6q + 4 = 11$.

Ennek a másodfokú egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében. 2 pont

A másik eset, ha $q = 2$. Ekkor $p^3 - 2^3 = (p - 2) \cdot (p^2 + 2p + 4) = 11r$. 2 pont

Ha $p - 2 = 1$, akkor $p = 3$, ám ez nem megoldás. 2 pont

A bal oldali két tényező egyike 11. Ha $p^2 + 2p + 4 = 11$, annak nincs megoldása a természetes számok körében. 2 pont

Ha $p - 2 = 11$ (azaz $p = 13$), akkor $r = 199$. 2 pont

Az egyenletnek egy megoldását találtuk a prímek körében: $p = 13$, $q = 2$, $r = 199$. 3 pont

Javítási útmutató

11. osztály, gimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírtól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.

1. Oldja meg a $\sqrt{x} = 1 - x$ egyenletet a valós számok körében. (10 pont)

1. megoldás. Az $a = \sqrt{x}$ helyettesítéssel az egyenletünk: $a = 1 - a^2$, azaz $a^2 + a - 1 = 0$. 2 pont

Az egyenlet gyökei: $a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ és $a_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

$a = \sqrt{x} \geq 0$. 2 pont

Ezért csak a $\sqrt{x} = a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ eset ad megoldást. 2 pont

Ebből $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

2. megoldás. Értelmezési tartomány $x \geq 0, 1 - x \geq 0$.

Tehát az egyenlet megoldásait $0 \leq x \leq 1$ feltétel mellett keressük. 2 pont

Négyzetre emelve az eredeti egyenletet: $x = (1 - x)^2, x^2 - 3x + 1 = 0$. 2 pont

Ennek az egyenletnek a megoldása: $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ és $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

Az értelmezési tartománynak x_1 nem eleme. 2 pont

Ezért az egyenlet megoldása $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 2 pont

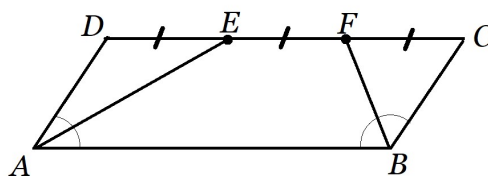
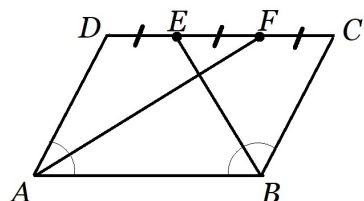
2. Az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsából induló szögfelezők a szemközti oldalt három egyenlő része osztják. Mekkora a paralelogramma rövidebb oldala, ha a kerülete 80 egység? (20 pont)

Megoldás. Az A csúcsnál lévő szöget a szögfelező két egyenlő részre osztja: $FAB\angle = DAF\angle$.

Az A és F csúcsnál lévő szögek váltószögek, tehát $FAB\angle = DFA\angle$.

Ezek miatt $DAF\angle = DFA\angle$. Tehát a DAF háromszög egyenlő szárú: $DA = DF$.

Ugyanígy $CB = CE$.



Az első ábrán $DC = 3x, DA = DF = 2x$.

A paralelogramma kerülete $80 = 2(2x + 3x)$, innen $x = 8$, és $AD = 2x = 16$.

A második ábrán $DC = 3x, DA = DE = x$.

A paralelogramma kerülete $80 = 2(x + 3x)$, innen $x = 10$, és $AD = x = 10$.

Egy jó ábra **2 pont**. Az egyenlő szárú háromszög felismerése és indoklása **2+2=4 pont**. Helyes egyenlet **2 pont**. Helyes eredmény **2 pont**. Ez így **10 pont**. A másik lehetőséget is megoldja, az **10 pont**. Összes: **10+10=20 pont**.

3. Mennyi az értéke?

(A) Ha $3x + 4y = 2019$ és $4x + 3y = 2020$, akkor mennyi $x + y$ értéke?

(B) Ha $12a + 10b = 120$, akkor mennyi $\frac{a}{5} + \frac{b}{6}$ értéke?

(C) Ha $(x + 2)(x^2 + 3x + 2) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, akkor mennyi $a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ értéke?

(D) Ha $a + \frac{1}{a} = 3$, akkor mennyi $a^2 + \frac{1}{a^2}$ értéke?

(E) Az x, y, z pozitív számokra $x(x + y + z) = 26$, $y(x + y + z) = 27$, $z(x + y + z) = 28$ teljesül. Mennyi $x + y + z$ értéke?

(12 pont)

Megoldás. (A) $(3x + 4y) + (4x + 3y) = 4039$, azaz $7(x + y) = 7 \cdot 577$,
tehát $x + y = 577$.

(Az egyenletrendszer megoldásai $x = 289$, $y = 288$.)

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(B) A $12a + 10b = 120$ egyenlőséget osszuk el 60-nal: $\frac{a}{5} + \frac{b}{6} = 2$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(C) A műveletek elvégzése után is leolvasható a válasz, de gyorsabban célba érünk, ha $x = 1$ -et helyettesítünk a kifejezésbe:

$(1 + 2)(1^2 + 3 \cdot 1 + 2) = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$,
azaz $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \cdot 6 = 18$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

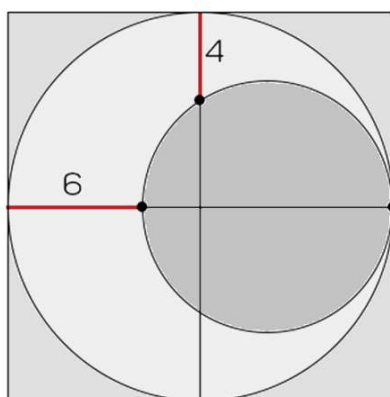
(D) Ha $a + \frac{1}{a} = 3$, akkor $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 9$, azaz $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9$, tehát $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(E) Adjuk össze a három egyenlőtlenséget, így az $(x + y + z)^2 = 81$ egyenlőséget kapjuk,
azaz $x + y + z = 9$.

3+1=4 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

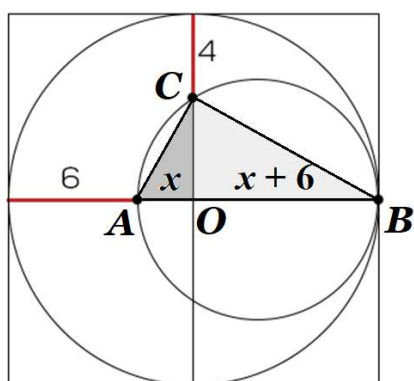
4. Mekkora a négyzet oldala?



(12 pont)

1. megoldás. Ha $OA = x$, akkor $OB = x + 6$ és $OC = x + 2$.

Az ABC derékszögű háromszög hasonló az AOC háromszöghöz, így $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AO}$.



$$\text{Tehát } \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+(x+2)^2}} = \frac{\sqrt{x^2+(x+2)^2}}{x}.$$

Innen $x = 2$, így a négyzet oldala 16 egység.

2. megoldás. Az előbbi jelölések segítségével írjuk fel a Pitagorasz-tételt az ABC derékszögű háromszögben: $\{x^2 + (x + 2)^2\} + \{(x + 2)^2 + (x + 6)^2\} = (2x + 6)^2$.

Innen $x = 2$, így a négyzet oldala 16 egység.

3. megoldás. Legyen $a = OB$. Adott kör belső pontján áthaladó tetszőleges húr szeleteinek szorzata a húr helyzetétől független állandó érték, így a belső kör O pontján átmenő két húr szeleteinek szorzatára $(a - 6)a = (a - 4)^2$.

Innen $a = 8$, tehát a négyzet oldala 16 egység.

4 pont, ha a megoldáshoz elvezető úton jár.
4 pont, ha felírja a megoldást adó egyenletet.
2 pont, ha jó az egyenlet megoldása.
2 pont, a helyes eredmény.

5. Határozza meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 - mx + m - 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyökének kétszerese legyen.

(14 pont)

1. **megoldás.** $D = (-m)^2 - 4(m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$, és $m \neq 2$ esetén az egyenletnek két gyöke van. 2 pont

A gyökök $x_{1,2} = \frac{m \pm (m-2)}{2}$, azaz $x_1 = m - 1$, $x_2 = 1$. 4 pont

Ha $x_1 = 2x_2$, azaz $m - 1 = 2$, 2 pont
akkor $m = 3$. 2 pont

Ha $x_2 = 2x_1$, $1 = 2(m - 1)$, 2 pont
akkor $m = \frac{3}{2}$. 2 pont

2. **megoldás.** $D = (m - 2)^2 \geq 0$, és ha $m \neq 2$, akkor az egyenletnek két gyöke van. 2 pont

A gyökök és együtthatók közti összefüggés miatt $x_1 + x_2 = m$ és $x_1 \cdot x_2 = m - 1$. 4 pont

Mivel $x_1 = 2x_2$, ezért $2x_2 + x_2 = m$, $x_2 = \frac{m}{3}$. 2 pont

Továbbá $x_1 \cdot x_2 = m - 1$, azaz $\frac{2m}{3} \cdot \frac{m}{3} = m - 1$, $2m^2 - 9m + 9 = 0$. 2 pont

Így $m = 3$, vagy $m = \frac{3}{2}$. 2+2=4 pont

6. Az erdei kisvasút egyenletes sebességgel haladt hosszú időn át, megállók nem voltak. A vonaton utazott Marci, aki az ablakból meglátta a pálya melletti kilométerkövön lévő kétjegyű számot. Pontosan egy óra múlva ismét megpillantott egy kilométerkövet, ezen is kétjegyű szám volt, ugyanolyan számjegyeket tartalmazott, mint az előző, csak a sorrendjük fordított volt. Ismét egy óra múlva a kilométerkövön egy háromjegyű szám volt látható. A szélső számjegyek megegyeztek az első kilométerkövön látott számjegyekkel, a középső számjegy 0 volt.

Milyen sebességgel haladt a vonat?

(12 pont)

Megoldás: Az első kilométerkövön $\overline{ab}$, a második kövön $\overline{ba}$, a harmadikon $\overline{a0b}$ látható.

2 pont

Mivel a vonat egyenletes sebessége mellett a számok megjelenése közt azonos idő, 1-1 óra telt el, ezért a megtett utak egyenlők. $\overline{a0b} - \overline{ba} = \overline{ba} - \overline{ab}$, 2 pont

tehát $(100a + b) - (10b + a) = (10b + a) - (10a + b)$, azaz $108a = 18b$, $b = 6a$. 2 pont

Mivel a és b nullától különböző számjegyek, ezért $a = 1$, $b = 6$. 2 pont

A kilométerköveken a 16, 61, 106 számok voltak, $106 - 61 = 61 - 16 = 45$. 2 pont

A vonat sebessége 45 km/h. 2 pont

7. A p, q, r prímekre $p^3 - q^3 = 11r$ teljesül. Melyek ezek a prímek?

(20 pont)

Megoldás. Mind a három prím nem lehet páratlan, mert ekkor a bal oldal páros, a jobb oldal páratlan.

2 pont

Tehát van páros szám a prímek között, és csak az egyik lehet páros.

2 pont

Két lehetőség van: $r = 2$ vagy $q = 2$.

2 pont

Ha $r = 2$, akkor $p^3 - q^3 = 11 \cdot 2$, azaz $(p - q) \cdot (p^2 + pq + q^2) = 2 \cdot 11$.

2 pont

Ha $p - q = 1$, akkor $p = 3, q = 2$, ami nem megoldás.

1 pont

Emiatt $p - q = 2, p = q + 2$, és így a másik tényező $p^2 + pq + q^2 = 3q^2 + 6q + 4 = 11$.

Ennek a másodfokú egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében.

2 pont

A másik eset, ha $q = 2$. Ekkor $p^3 - 2^3 = (p - 2) \cdot (p^2 + 2p + 4) = 11r$.

2 pont

Ha $p - 2 = 1$, akkor $p = 3$, ám ez nem megoldás.

1 pont

A bal oldali két tényező egyike 11. Ha $p^2 + 2p + 4 = 11$, annak nincs megoldása a természetes számok körében.

1 pont

Ha $p - 2 = 11$ (azaz $p = 13$), akkor $r = 199$, hiszen $19 \neq 11r$.

1 pont

Az egyenletnek egy megoldását találtuk a prímek körében: $p = 13, q = 2, r = 199$.

4 pont

Javítási útmutató

12. osztály, szakgimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírtól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.

1. Oldja meg a $\lg^2 x + \lg x^2 = 3$ egyenletet a valós számok halmazán!

(10 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartományba az $x > 0$ számok tartoznak.

2 pont

$\lg x^2 = 2 \lg x$, így az egyenlet $\lg^2 x + 2 \lg x = 3$.

2 pont

Az egyenlet $y = \lg x$ -re nézve másodfokú egyenlet.

2 pont

Az $y^2 + 2y - 3 = 0$ egyenlet megoldásai $y_1 = 1$ és $y_2 = -3$,

2 pont

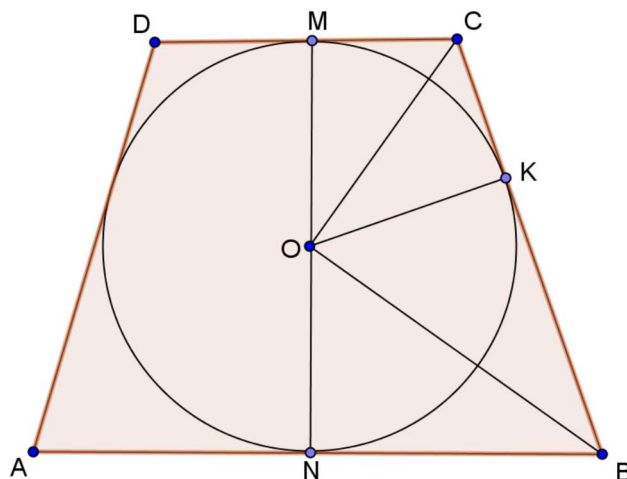
azaz $x_1 = 10$ és $x_2 = 0,001$.

2 pont

2. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz hosszabbik alapján fekvő szögei 60° -osak, a trapézba írt, az oldalakat érintő kör sugara $3\sqrt{3}$ cm. Mekkora a trapéz kerülete?

(14 pont)

Megoldás. A trapéz oldalait a beírt kör négy pontban érinti, közülük hármat megneveztünk az ábrán, ezek a K , M , N pontok.



A BKO derékszögű háromszög félszabályos, mert $\angle OBK = 30^\circ$.

Ezért $KB = \sqrt{3} \cdot OK = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$ cm.

A CKO derékszögű háromszög félszabályos, mert $\angle OCK = 60^\circ$.

Ezért $CK = \frac{OK}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ cm.

Körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $BN = BK = 9$ cm,

így $AB = 18$ cm,

és $CM = CK = 3$ cm, így $CD = 6$ cm.

A trapéz szárainak hossza $9 + 3 = 12$ cm.

A trapéz kerülete $18 + 12 + 6 + 12 = 48$ cm.

Egy jó ábra **2 pont**.

Az érintőszakaszok 3 és 9 hosszúságának számolása **4+4=8 pont**.

A kerületre helyes eredmény **4 pont**.

Megjegyzés: Mivel egy érintőnégyyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, így az érintőtrapéz kerületét számolhatjuk ezt használva: a kerület a két szár összegének kétszerese, azaz $2 \cdot (12 + 12) = 48$ cm.

3. Mennyi az értéke?

(A) Ha $x + y - z = -4$ és $x + y + z = 32$, akkor mennyi z értéke?

(B) Ha $a^2 + b^2 + c^2 = 7$ és $ab + bc + ca = 3$, akkor mennyi $(a + b + c)^2$ értéke?

(C) Ha $\frac{3+a}{3} = \frac{2b+2}{2}$, akkor mennyi $\frac{a}{b}$ értéke?

(D) Az a, b valós számokra $a + b = 13$ és $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 7$ teljesül. Mennyi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ értéke?

(E) Az a, b, c valós számokra $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ és $a + b + c = 9$. Mennyi az abc szorzat értéke?

(10 pont)

Megoldás. (A) Vonjuk ki az $x + y + z = 32$ egyenlőségből az $x + y - z = -4$ egyenlőséget: $2z = 36$, azaz $z = 18$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(B) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4 + 2 \cdot 3 = 10$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(C) Az egyenlőséget 6-tal szorozva: $6 + 2a = 6b + 6$. Innen $2a = 6b$, $a = 3b$, $\frac{a}{b} = 3$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

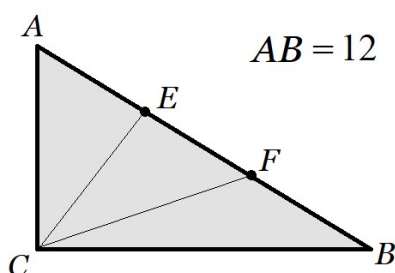
(D) $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ miatt $13 \cdot 7 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, így $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 89$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(E) Mivel $x^2 \geq 0$, így $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$. Az összeg értéke pontosan akkor 0, ha minden tagja 0, vagyis $a = b = c$. Az $a + b + c = 9$ egyenlőség miatt $a = b = c = 3$, így $abc = 27$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

4. Az ABC derékszögű háromszög átfogója 12 egység, E és F az AB átfogó harmadolópontjai.

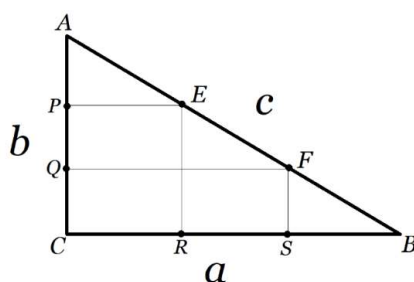


Mennyi a $CE^2 + CF^2$ összeg értéke?

(12 pont)

Megoldás. Az ábra jelölései szerint: $a^2 + b^2 = c^2 = 12^2$

2 pont



$$CE^2 = CR^2 + RE^2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}b\right)^2,$$

2 pont

$$\text{és } CF^2 = CS^2 + SF^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2,$$

2 pont

azaz $9 \cdot CE^2 = a^2 + 4b^2$, és $9 \cdot CF^2 = 4a^2 + b^2$.

$$\text{Innen } 9(CE^2 + CF^2) = 9 \cdot CE^2 + 9 \cdot CF^2 = (a^2 + 4b^2) + (4a^2 + b^2) = 5(a^2 + b^2) = 5c^2.$$

$$\text{Tehát } 9(CE^2 + CF^2) = 5c^2.$$

4 pont

$$\text{Így } 9(CE^2 + CF^2) = 5 \cdot 12^2 = 5 \cdot (3 \cdot 4)^2, \text{ azaz } CE^2 + CF^2 = 5 \cdot 16 = 80.$$

2 pont

5. Oldja meg az egyenletet a valós számok körében.

$$\frac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1} + \frac{4x-4x^2-1}{x^3-3x^2+2} = 0$$

(14 pont)

Megoldás. $4x - 4x^2 - 1 = -(4x^2 - 4x + 1) = -(2x - 1)^2$, így az egyenlet a következő:

$$\frac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2}{x^3-3x^2+2}$$

2 pont

Ha $2x - 1 \neq 0$, azaz $x \neq \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{x^3-2x^2+1} = \frac{1}{x^3-3x^2+2}$.

2 pont

Innen $x^3 - 3x^2 + 2 = x^3 - 2x^2 + 1$, azaz $x^2 = 1$. Így az $x = 1$ és $x = -1$ értékek adódnak megoldásként.

2 pont

Azonban $x = 1$ esetén a törtek nevezője 0, tehát ez nem megoldás.

2 pont

$x = -1$ -re a nevezők értéke $-2 \neq 0$, így ez megoldás.

2 pont

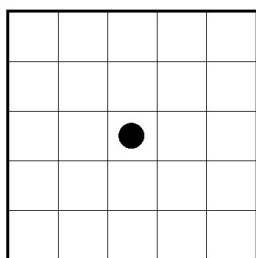
Nézzük a $2x - 1 = 0$ esetet. Ekkor $x = \frac{1}{2}$, a számlálók értéke 0, továbbá egyik nevező sem 0, így teljesül az egyenlőség az egyenletben. Tehát $x = \frac{1}{2}$ is megoldás. 2 pont

Az egyenlet gyökei: $x = -1$ és $x = \frac{1}{2}$. 2 pont

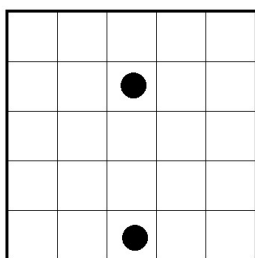
6. Egy 5×5 -ös táblára letettem néhány bábut úgy, hogy a tábla bármely 3×3 -as részében pontosan egy bábu áll. Hány bábut tehettem a táblára?

(22 pont)

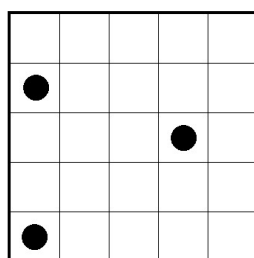
Megoldás. A táblára a feltételt betartva letehetünk 1, 2, 3 vagy 4 bábut.



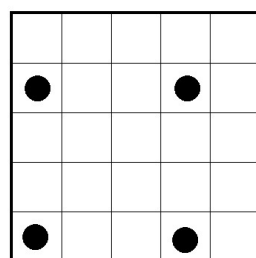
1



2



3



4

4+4+4+4 pont

4-nél több bábut nem lehet. Tekintsük a táblázat egy-egy sarkát tartalmazó 3×3 -as részeit. Ezek lefedik az 5×5 -ös táblát (és vannak átfedések is), és mind a négyben egy bábu van (és egy bábu tartozhat több 3×3 -ashoz is), emiatt legfeljebb 4 bábu van a táblán. 6 pont

7. A p és q prímekre $p^6 - q^2 = 0,5 \cdot (p - q)^2$ teljesül. Melyek ezek a prímek?

(18 pont)

Megoldás. Az egyenletet átrendezve $3q^2 = 2p^6 - p^2 + 2pq$ összefüggéshez jutunk. 5 pont

p osztója a jobb oldalnak, így osztója $3q^2$ -nek is. 2 pont

Mivel $p \neq q$ (ez az eredeti egyenlet alapján nyilvánvaló), ezért $p = 3$. 2+2 pont

Emiatt $3q^2 = 1449 + 6q$, azaz $q^2 - 2q + 483 = 0$. 2 pont

A $q^2 - 2q + 483 = (q - 23)(q + 21)$ szorzattá alakítás mutatja, hogy a prímek körében csak egy megoldás van: $q = 23$. 3 pont

A keresett prímek: $p = 3$ és $q = 23$. 2 pont

Javítási útmutató

12. osztály, gimnázium

Útmutatás a pontozáshoz: Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírtól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.

1. Oldja meg a $\lg^2 x + \lg x^2 = 3$ egyenletet a valós számok halmazán!

(10 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartományba az $x > 0$ számok tartoznak.

2 pont

$\lg x^2 = 2 \lg x$, így az egyenlet $\lg^2 x + 2 \lg x = 3$.

2 pont

Az egyenlet $y = \lg x$ -re nézve másodfokú egyenlet.

2 pont

Az $y^2 + 2y - 3 = 0$ egyenlet megoldásai $y_1 = 1$ és $y_2 = -3$,

2 pont

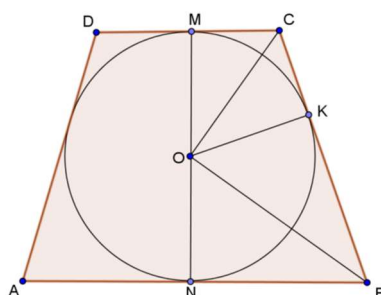
azaz $x_1 = 10$ és $x_2 = 0,001$.

2 pont

2. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz hosszabbik alapján fekvő szögei 60° -osak, a trapézba írt, az oldalakat érintő kör sugara $3\sqrt{3}$ cm. Mekkora a trapéz kerülete?

(14 pont)

Megoldás. A trapéz oldalait a beírt kör négy pontban érinti, közülük hármat megneveztünk az ábrán, ezek a K , M , N pontok.



A BKO derékszögű háromszög félszabályos, mert $\angle OBK = 30^\circ$.

Ezért $KB = \sqrt{3} \cdot OK = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$ cm.

A CKO derékszögű háromszög félszabályos, mert $\angle OCK = 60^\circ$.

Ezért $CK = \frac{OK}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ cm.

Körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $BN = BK = 9$ cm,

így $AB = 18$ cm,

és $CM = CK = 3$ cm, így $CD = 6$ cm.

A trapéz szárainak hossza $9 + 3 = 12$ cm.

A trapéz kerülete $18 + 12 + 6 + 12 = 48$ cm.

Egy jó ábra 2 pont. Az érintőszakaszok 3 és 9 hosszúságának számolása 4+4=8 pont.

A kerületre helyes eredmény 4 pont.

Megjegyzés: Mivel egy érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, így az érintőtrapéz kerületét számolhatjuk ezt használva: a kerület a két szár összegének kétszerese, azaz $2 \cdot (12 + 12) = 48$ cm.

3. Mennyi az értéke?

(A) Ha $x + y - z = -4$ és $x + y + z = 32$, akkor mennyi z értéke?

(B) Ha $a^2 + b^2 + c^2 = 7$ és $ab + bc + ca = 3$, akkor mennyi $(a + b + c)^2$ értéke?

(C) Ha $\frac{3+a}{3} = \frac{2b+2}{2}$, akkor mennyi $\frac{a}{b}$ értéke?

(D) Az a, b valós számokra $a + b = 13$ és $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 7$ teljesül. Mennyi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ értéke?

(E) Az a, b, c valós számokra $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ és $a + b + c = 9$. Mennyi az abc szorzat értéke?

(10 pont)

Megoldás. (A) Vonjuk ki az $x + y + z = 32$ egyenlőségből az $x + y - z = -4$ egyenlőséget: $2z = 36$, azaz $z = 18$. **1+1=2 pont** a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(B) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4 + 2 \cdot 3 = 10$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(C) Az egyenlőséget 6-tal szorozva: $6 + 2a = 6b + 6$. Innen $2a = 6b$, $a = 3b$, $\frac{a}{b} = 3$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(D) $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ miatt $13 \cdot 7 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, így $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 89$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

(E) Mivel $x^2 \geq 0$, így $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$. Az összeg értéke pontosan akkor 0, ha minden tagja 0, ha $a = b = c$. Az $a + b + c = 9$ egyenlőség miatt $a = b = c = 3$, így $abc = 27$.

1+1=2 pont a megoldáshoz vezető számolás menetére + a helyes az eredményre

4. Egy számot nevezzünk *multiplikatív*nak, ha valamelyik számjegye a többi számjegy szorzata. Hány háromjegyű multiplikatív szám van?

(12 pont)

Megoldás. Számoljuk meg a háromjegyű multiplikatív számokat aszerint, hogy mennyi a „többi számjegy szorzata”.

2 pont

Ha a szorzat 1, akkor a háromjegyű szám 111.

1 pont

Ha a szorzat 2, 3, 5 vagy 7 (azaz prímszám), akkor rendre 3-3 szám van. Például 2 esetén 122, 212, 221. Ez összesen 12 szám.

2 pont

Ha a szorzat 4, akkor a számok 144, 414, 441, 224, 242, 422, ez összesen 6 szám.

1 pont

Ha a szorzat 6, akkor a számok 166, 616, 661, 236, 326, 263, 362, 632, 623, ez 9 szám.

1 pont

8 esetén a számok 188, 818, 881, 248, 428, 284, 482, 824, 842, ez is 9 szám.

1 pont

Ha a szorzat 9, akkor a számok 199, 919, 991, 339, 393, 933, összesen 6 szám.

1 pont

A szorzat lehet 0 is, így a 100, 200, ..., 900 számok is multiplikatív számok, most 9 számot soroltunk fel.

1 pont

Összegezve $1 + 12 + 6 + 9 + 9 + 9 + 6 + 9 = 61$ multiplikatív számot találtunk.

2 pont

5. Oldja meg a valós számok körében a $\log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2$ egyenlőtlenséget. (18 pont)

Megoldás. $\log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2 = \log_x \frac{1}{x^2}$. 2 pont

Két eset van aszerint, ha $x > 1$, vagy ha $0 < x < 1$. 2 pont

Ha $x > 1$, akkor $\frac{3}{8-2x} \geq \frac{1}{x^2}$, azaz $0 \leq \frac{3}{8-2x} - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2 - (8-2x)}{2(4-x) \cdot x^2}$. Mivel $2x^2 > 0$, emiatt a $\frac{3x^2 - (8-2x)}{4-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget kell vizsgálni. 2 pont

A számlálót szorzattá alakítjuk, és így a $\frac{3(x+2)(x-\frac{4}{3})}{4-x} \geq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. 2 pont

Mivel $x > 1$, ezért $3(x+2) > 0$, tehát $\frac{x-\frac{4}{3}}{4-x} \geq 0$. A számláló és a nevező egyszerre nem lehet

negatív, így az $x - \frac{4}{3} \geq 0$, $4 - x > 0$, $x > 1$ egyenlőtlenségek közös megoldását keressük. A

megoldás: $\frac{4}{3} \leq x < 4$. 2 pont

A másik esetben $0 < x < 1$. Ekkor $\frac{3}{8-2x} > 0$ és $\frac{3}{8-2x} \leq \frac{1}{x^2}$. 2 pont

A $0 < x < 1$ feltétel miatt $\frac{3}{8-2x} > 0$, ezért elegendő a $\frac{3}{8-2x} \leq \frac{1}{x^2}$ egyenlőtlenséget vizsgálni.

A korábbi számítások alapján $\frac{3(x+2)(x-\frac{4}{3})}{4-x} \leq 0$. 2 pont

A $0 < x < 1$ esetén $3(x+2) > 0$, $4-x > 0$ és $x - \frac{4}{3} < 0$, ezért teljesül a $\frac{3(x+2)(x-\frac{4}{3})}{4-x} \leq 0$ egyenlőtlenség. 2 pont

Ezek alapján a $\log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2$ egyenlőtlenség megoldása $\frac{4}{3} \leq x < 4$ és $0 < x < 1$. 2 pont

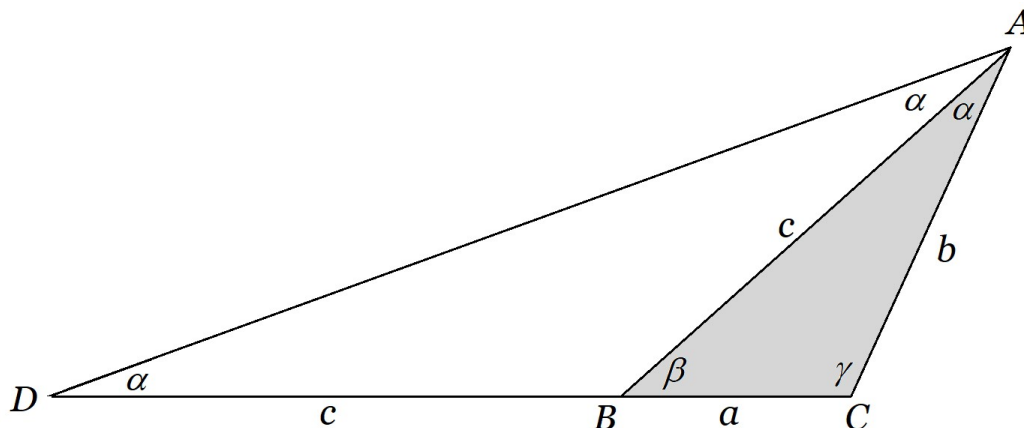
6. A lumumbák egyik falujában 50-en élnek, közöttük 25 igazmondó és 25 hazug van. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazugok minden állítása hamis. A faluban viszály tört ki, egymást gyilkolták a falubeliek, és a lakosok fele meghalt. Az életben maradt falusiak mindegyike azt mondta, hogy pontosan egy igazmondót ölt meg. Legfeljebb hány igazmondó maradhatott életben? (16 pont)

Megoldás: Minden túlélő igazmondó pontosan egy igazmondót ölt meg. Ezért a túlélő igazmondók száma nem több a meghalt igazmondók számánál, azaz a túlélő igazmondók számának kétszerese legfeljebb 25, legfeljebb 12 túlélő igazmondó van. 8 pont

Ennyi lehet is, ha az egyik igazmondó megöl egy másikat, majd az életben maradt igazmondók egyik fele megöli a másik felét, beleértve az elsőként megnevezett igazmondót. 8 pont

7. Az a, b, c oldalú háromszög oldalaira $b^2 = ca + a^2$ és $c^2 = ab + b^2$ teljesül. Mekkora a háromszög szögei? (20 pont)

1. megoldás. Az ABC háromszög oldalai a, b, c . A BC oldal egyenesén az ábra szerint felvesszük a D pontot úgy, hogy $BA = BD$.



A $b^2 = ca + a^2$ összefüggésből $\frac{b}{a} = \frac{c+a}{b}$ adódik, tehát az ABC és a DAC háromszögek hasonlóak, hiszen megegyeznek két oldal arányában és az általuk bezárt szögben.

A hasonlóság miatt $ADC\angle = \alpha$ és $DAC\angle = \beta$.

A DBA háromszög egyenlő szárú, tehát $ADB\angle = BAD\angle = \alpha$.

Ezek miatt $DAC\angle = \beta = 2\alpha$.

A $c^2 = ab + b^2$ összefüggésből az előbbihez hasonlóan számolva $\gamma = 2\beta$ adódik.

Tehát a háromszög szögei $\alpha, 2\alpha, 4\alpha$. Ezért a háromszög szögei $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$.

A hasonlósági arány felírása **4 pont.**

Ehhez az ábra **5 pont.**

A $\beta=2\alpha$ megállapításra **4 pont.**

A $\gamma=2\beta$ összefüggésre **4 pont.**

Helyes végeredmény **3 pont.**

2. megoldás. A feladat trigonometriai eszközökkel is megoldható.

A háromszög szögei a szokásos jelölésekkel α, β, γ . Az oldalakra vonatkozó feltételekből $a < b < c$ következik, és így $\alpha < \beta < \gamma$.

A $b^2 = ca + a^2$ összefüggés és a b oldalra felírt koszinusztétel, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ alapján $ca = c^2 - 2ca \cos \beta$. 3 pont

Így $\frac{c}{a} - 2 \cos \beta = 1$. 3 pont

A szinusztétel szerint $\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$. 3 pont

Ezért $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} - 2 \cos \beta = 1$. Innen $\sin \gamma - 2 \cos \beta \sin \alpha = \sin \alpha$, mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ezért $\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, így $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - 2 \cos \beta \sin \alpha = \sin \alpha$, azaz $\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha = \sin \alpha$, vagyis $\sin(\beta - \alpha) = \sin \alpha$. Ezért $\beta = 2\alpha$. 4 pont

A $c^2 = ab + b^2$ összefüggésből az előbbihez hasonlóan számolva $\gamma = 2\beta$ adódik. 4 pont

Tehát a háromszög szögei $\alpha, 2\alpha, 4\alpha$. Ezért a háromszög szögei $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$. 3 pont