(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Anna kéthetente egy, míg Barnabás hetente két órát tölt el konditeremben. Hány hét alatt van Barnabásnak 15 órával több edzése, mint Annának?

(14 pont)

Megoldás:

Két hét alatt Barnabás 4, míg Anna 1 órát tölt el a konditeremben. Így két hét alatt szerez Barnabás 3 óra előnyt.

(6 pont)

Ezt kell 15-re növelnie, ami 5-szöröse a 3-nak.

(5 pont)

Ehhez szükséges $5 \cdot 2 = 10$ hét.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy étteremben 22 asztal van, mindegyik mellett 3, 4 vagy 6 szék található. A 3 és 4 személyes asztalokhoz összesen 40 vendég tud leülni. Hány 4 személyes asztal van, ha tudjuk, hogy egyszerre az étteremben 100 vendéget tudnak leültetni?

(14 pont)

Megoldás:

Ha 40 vendég ül a 3 és 4 személyes asztaloknál, akkor 60 vendég a 6 személyes asztaloknál foglal helyet, vagyis a 6 személyes asztalokból 10 van.

(4 pont)

Így a 3 és 4 személyes asztalokból összesen 12 van.

(2 pont)

Ha mind 4 személyes lenne, akkor még 48 személy foglalhatna helyet, de csak 40 tud leülni. Ez 8-cal kevesebb, ami azt jelenti, hogy 8 háromszemélyes asztal van.

(5 pont)

Így a 4 személyes asztalok száma 4 az étteremben.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

3. Két pozitív szám átlaga 40%-kal kisebb, mint a két szám közül a nagyobbik. Hány %-kal nagyobb az átlag a kisebbik számnál?

(16 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot x és y, ahol $x > y$.

(2 pont)

A feltételek miatt:

$$\frac{x+y}{2} = 0{,}6 \cdot x$$

(3 pont)

Ezt átrendezve

$$x = 5 \cdot y$$

adódik.

(4 pont)

Így a két szám átlaga:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{6y}{2} = 3y$$

(4 pont)

Ez azt jelenti, hogy az átlag 200%-kal nagyobb, mint a kisebbik szám.

(3 pont)

Összesen: 16 pont

4. Mennyi azoknak a háromjegyű számoknak az összege, melyeknek a számjegyeit összeszorozva 189-et kapunk eredményül?

(18 pont)

Megoldás:

Mivel a 189 prímtényezős felbontása $189 = 3^3 \cdot 7$, ezért ez három számjegy szorzataként csak $3 \cdot 7 \cdot 9$ alakban állítható elő.

(6 pont)

Ezekből a számjegyekből $3! = 6$ háromjegyű szám állítható elő, melyekben minden helyiértéken mindegyik számjegy pontosan 2-szer szerepel.

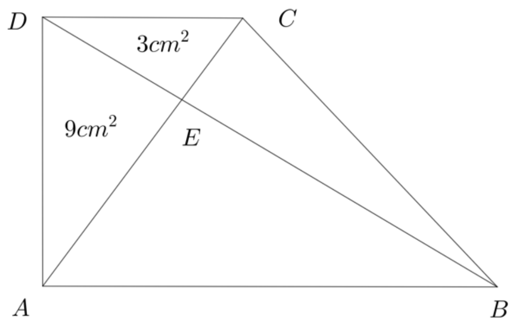
(6 pont)

Így az egyes helyiértéken levő számjegyek összege $2 \cdot (3+7+9) = 38$. Ennek alapján a háromjegyű számok összege $38 \cdot 111 = 4218$ lesz.

(6 pont)

Összesen: 18 pont

5. Egy *ABCD* derékszögű trapéz *A* és *D* csúcsában derékszög van. A négyszöget átlói négy háromszögre bontják. Ezek területei közül kettőt az ábrának megfelelően ismerünk. Hány cm^2 a teljes *ABCD* négyszög területe?



(18 pont)

Megoldás:
Használva a fenti ábra jelöléseit, először azt vegyük észre, hogy az *AED* és *BEC* háromszögek egyenlő területűek. Ez abból adódik, hogy mindkettő az egyenlő területű *ABC* és *ABD* háromszögek területének és az *AED* háromszög területének különbsége. Tehát EBC háromszög területe is 9 cm^2.

(5 pont)

Az *AED* és *ECD* háromszögek területének aránya 3:1, ez az $AE{:}EC = DE{:}EB$ arányokat is meghatározza.

(5 pont)

Ez az arány tartozik az *AEB* és *EBC* háromszögek területének arányához is.

(4 pont)

Ha az AEB és ECD hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya 3:1, akkor a területek aránya 9:1. Ami azt jelenti, hogy az *AEB* háromszög területe $3 \cdot 9 = 27\ cm^2$.

(2 pont)

Így az *ABCD* trapéz területe 48 cm^2.

(2 pont)

Összesen: 18 pont

6. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax + b$ függvényben az *a* és *b* pozitív valós paraméterek.

Ha tudjuk, hogy $f(f(0)) = 9$ és $f(f(1)) = 13$, akkor mennyi $f(f(2024))$ értéke?

(20 pont)

Megoldás:
Keressük meg $f(f(x))$ kifejezést.

$$f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

(8 pont)

A megadott értékek szerint:

$$ab + b = 9$$
$$a^2 + ab + b = 13$$

Az egyenletrendszer pozitív valós megoldásai $a = 2$ és $b = 3$ lesznek.

(8 pont)

Így $f\left(f(x)\right) = 4x + 9$.

(2 pont)

A keresett érték: $f\left(f(2024)\right) = 8105$.

(2 pont)

Összesen: 20 pont