(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Anna kéthetente egy, míg Barnabás hetente két órát tölt el konditeremben. Hány hét alatt van Barnabásnak 15 órával több edzése, mint Annának?

(14 pont)

Megoldás:

Két hét alatt Barnabás 4, míg Anna 1 órát tölt el a konditeremben. Így két hét alatt szerez Barnabás 3 óra előnyt.

(6 pont)

Ezt kell 15-re növelnie, ami 5-szöröse a 3-nak.

(5 pont)

Ehhez szükséges $5 \cdot 2 = 10$ hét.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy étteremben 22 asztal van, mindegyik mellett 3, 4 vagy 6 szék található. A 3 és 4 személyes asztalokhoz összesen 40 vendég tud leülni. Hány 4 személyes asztal van, ha tudjuk, hogy egyszerre az étteremben 100 vendéget tudnak leültetni?

(14 pont)

Megoldás:

Ha 40 vendég ül a 3 és 4 személyes asztaloknál, akkor 60 vendég a 6 személyes asztaloknál foglal helyet, vagyis a 6 személyes asztalokból 10 van.

(4 pont)

Így a 3 és 4 személyes asztalokból összesen 12 van.

(2 pont)

Ha mind 4 személyes lenne, akkor még 48 személy foglalhatna helyet, de csak 40 tud leülni. Ez 8-cal kevesebb, ami azt jelenti, hogy 8 háromszemélyes asztal van.

(5 pont)

Így a 4 személyes asztalok száma 4 az étteremben.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

3. Két pozitív szám átlaga 40%-kal kisebb, mint a két szám közül a nagyobbik. Hány %-kal nagyobb az átlag a kisebbik számnál?

(16 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot x és y, ahol $x > y$.

(2 pont)

A feltételek miatt:
$\frac{x+y}{2} = 0{,}6 \cdot x$

(3 pont)

Ezt átrendezve
$x = 5 \cdot y$
adódik.

(4 pont)

Így a két szám átlaga:
$\frac{x+y}{2} = \frac{6y}{2} = 3y$

(4 pont)

Ez azt jelenti, hogy az átlag 200%-kal nagyobb, mint a kisebbik szám.

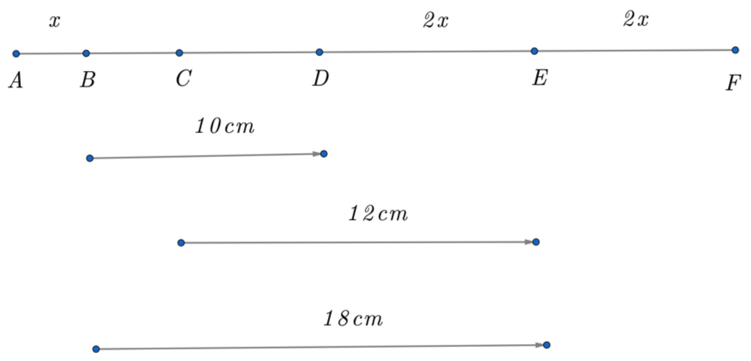
(3 pont)

Összesen: 16 pont

4. **Egy számegyenesen felveszünk hat *A, B, C, D, E, F* pontokat ebben a sorrendben. Ha *DF* kétszer akkora, mint *EF,* ami viszont kétszerese *AB* szakasznak, *BD*=10 cm, *CE*=12 cm és *BE*=18 cm, akkor hány cm az *AF* szakasz hossza?**

(18 pont)

Megoldás:
Vegyük fel a számegyenest és azon a megadott pontokat. Jelöljük az AB szakaszt *x*-el.



(7 pont)

Az ábra alapján:

amiből $x = 4$ négy adódik.

(7 pont)

Ebből már az AF szakasz hossza meghatározható.
$AF = 8 + 18 + 16 = 42\ cm$

(4 pont)

Összesen: 18 pont

5. **Hány olyan háromjegyű pozitív szám van, amely**

   a. **egy páratlan szám négyzete és**

   b. **nem lehet felírni három különböző pozitív kétjegyű szám összegeként?**

(18 pont)

Megoldás:
A legnagyobb szám, amit felírhatunk különböző kétjegyű számok összegeként:

$$99+98+97=294$$

(5 pont)

Ezért azokat a páratlan négyzetszámokat kell összeszámolni, melyek 294-nél nagyobbak.

(4 pont)

A legkisebb ezek között a $19^2=361$, a legnagyobb, amely még háromjegyű a $31^2=961$.

(4 pont)

Ebből adódik, hogy összesen 7 ilyen szám felel meg a feltételeknek.

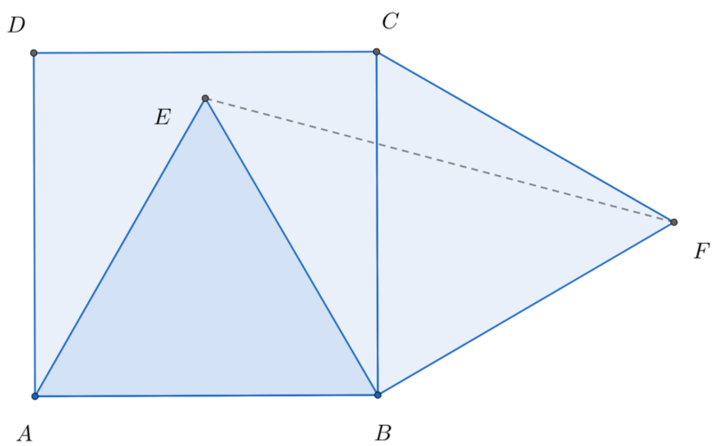
(4 pont)

Összesen: 18 pont

6. **Egy egységnyi oldalú *ABCD* négyzet *AB* oldalára a négyzetbe befelé *ABE*, a *BC* oldalára pedig kifelé egy *BCF* szabályos háromszöget szerkesztünk. Határozzuk meg az *EF* szakasz hosszát!**

(20 pont)

Megoldás:
Használjuk az alábbi ábra jelöléseit.



(3 pont)

Az *ABE* és *CBF* egybevágó szabályos háromszögek és *AB*, *BC* szakaszok 90°-os szöget zárnak be.

(5 pont)

Ez azt jelenti, hogy az *ABE* háromszög *B* körüli 90°-os forgatással a *CBF* háromszögbe vihető át.

(5 pont)

Így az *EB* és *BF* szakaszok szintén merőlegesek lesznek egymásra, vagyis a *BFE* háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

(3 pont)

Ennek átfogója Pitagorasz tételéből $\sqrt{2}$-nek adódik.

(4 pont)

Összesen: 20 pont