(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Egy szabályos sokszögnek ugyanannyi oldala van, mint átlója. Mekkorák a szögei?

(14 pont)

Megoldás:

A sokszög oldalainak száma legyen n. Így az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$

(3 pont)

A feltételek szerint:

$$n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Mivel $n \neq 0$, egy elsőfokú egyenlethez jutunk és azt megoldjuk.

(4 pont)

Ennek megoldása $n = 5$.

(3 pont)

A szabályos ötszög belső szögeire $108°$ adódik.

(4 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy kosárban almák és körték vannak. Anna megevett egy almát, így háromszor annyi alma maradt, mint körte. Ezután Bea evett meg egy körtét, így az almák száma négyszerese lett a körték számának. Hány gyümölcs volt eredetileg a kosárban?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje kezdetben a kosárban levő körték számát x, így a feltételek miatt az almák száma kezdetben $3x + 1$ volt.

(5 pont)

Ezután egy körtét elfogyasztva azok szám $x - 1$ lesz. Erre teljesül, hogy:

$$4(x-1) = 3x$$

melynek megoldása

$$x = 4$$

(5 pont)

Így a kosárban kezdetben levő gyümölcsök száma: 4 körte + 13 alma, azaz 17 gyümölcs.

(4 pont)

Összesen: 14 pont

3. Melyik számból van több, és mennyivel, a nullára végződő négyjegyű, vagy a nem nullára végződő háromjegyű páros számokból?

(16 pont)

Megoldás:

A 0-ra végződő négyjegyű számok száma: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, mert az ezres helyiértékre 9, a százasra és a tízesre 10, az egyesre egy féle számot írhatunk.

(7 pont)

A nem 0-ra végződő háromjegyű páros számok száma: $9 \cdot 10 \cdot 4 = 360$.

(6 pont)

Így a 0-ra végződő négyjegyű számokból van 540-gyel több.

(3 pont)

Összesen: 16 pont

Második megoldás:

Ha egy tetszőleges háromjegyű szám után nullát írunk, akkor négyjegyű, nullára végződő számot kapunk. Ezért az első halmaznak van több eleme.

(7 pont)

Annyival van több elem az első halmazban, amennyi a páratlan számra vagy 0-ra végződő háromjegyű számok száma. Ez $9 \cdot 10 \cdot 6 = 540$.

(9 pont)

Összesen: 16 pont

4. Egy nagy kocka egységnyi élű kis kockákból van összerakva. Közülük összesen 2024 olyan van, amelyik a nagy kocka élein vagy a csúcsaiban helyezkedik el. Hány kis kockából áll a nagy kocka?

(16 pont)

Megoldás:

A kocka 8 csúcsában 8 kis kocka található, így az éleken 2016 kocka lesz.

(4 pont)

Mivel a kockának 12 éle van, ezért minden élen belső részén $\frac{2016}{12} = 168$ kis kocka található.

(5 pont)

Így a kocka minden éle 170 kis kockát tartalmaz.

(3 pont)

Így a kockát $170^3 = 4913000$ kis kockából építhetjük meg.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

5. Két város között az autónk egyik irányban 34 liter, míg visszafelé 29 liter benzint fogyaszt. Tudjuk, hogy a fogyasztás az útviszonyok függvénye: síkon 5 litert, hegynek felfelé 8 litert, míg lefelé 3 litert fogyaszt 100 kilométerenként. A két város közötti út fele sík, a másik fele hegyes-völgyes. Mekkora a két helység közötti távolság?

(20 pont)

Megoldás:

Jelöljük az egyik irányban síkon, hegynek fel, majd völgynek megtett távolságokat 100 km-ben számolva, rendre x, y, z-vel. Visszaúton ezek rendre x, z, y lesznek.

(4 pont)

A feltételek szerint:

$$x = y + z$$

A fogyasztásokat figyelembe véve:

$$5x + 8y + 3z = 34$$
$$5x + 3y + 8z = 29$$

(6 pont)

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai:

$$x = 3, y = 2, z = 1$$

(6 pont)

A két helység közötti távolság 600 km-nek adódik.

(4 pont)

Összesen: 20 pont

6. Bori szerencse száma a 14-es. Hány olyan ötjegyű, tízes számrendszerbeli szám van, amelyben legalább egyszer szerepel a 14-es blokk? (Pl: 21436)

(20 pont)

Megoldás:

Egy ötjegyű számban legfeljebb kétszer fordulhat elő a 14-es blokk.

(2 pont)

Először számoljuk össze hány olyan van, ahol pontosan kétszer szerepel.
Az x1414 típusból 9 lesz.
A 14x14 és a 1414x típusból összesen 20.
Tehát ezek összesen 29 számot adnak.

(6 pont)

A pontosan egyszer 14-et tartalmazó számok a következők lehetnek:

14xxx típusú $10^3 - 20 = 980$, mert az utolsó három számjegy nem tartalmazhat 14-es blokkot, ezek száma lenne 20.
Az x14xx típus $9 \cdot 10^2 - 9 = 891$,
az xx14x típus $9 \cdot 10^2 - 10 = 890$,
az xxx14 pedig $9 \cdot 10^2 - 19 = 881$ esetben szerepel.

(10 pont)

Így a feltételnek megfelelő ötjegyű számok száma összesen ezek összege 3671.

(2 pont)

Összesen: 20 pont

(Ha nem veszi figyelembe, hogy egy adott számban a 14 több helyen is állhat, akkor legfeljebb 10 pontot kaphat.)