(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. **Egy szabályos sokszögnek ugyanannyi oldala van, mint átlója. Mekkorák a szögei?**

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

A sokszög oldalainak száma legyen n. Így az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$

(3 pont)

A feltételek szerint:

$$n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Mivel $n \neq 0$, egy elsőfokú egyenlethez jutunk és azt megoldjuk.

(4 pont)

Ennek megoldása $n = 5$.

(3 pont)

A szabályos ötszög belső szögeire 108° adódik.

(4 pont)

Összesen: 14 pont

2. **Egy kosárban almák és körték vannak. Anna megevett egy almát, így háromszor annyi alma maradt, mint körte. Ezután Bea evett meg egy körtét, így az almák száma négyszerese lett a körték számának. Hány gyümölcs volt eredetileg a kosárban?**

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Jelölje kezdetben a kosárban levő körték számát x, így a feltételek miatt az almák száma kezdetben $3x + 1$ volt.

(5 pont)

Ezután egy körtét elfogyasztva azok szám $x - 1$ lesz. Erre teljesül, hogy:

$$4(x-1) = 3x$$

melynek megoldása

$$x = 4$$

(5 pont)

Így a kosárban kezdetben levő gyümölcsök száma: 4 körte + 13 alma, azaz 17 gyümölcs.

(4 pont)

Összesen: 14 pont

3. **Melyik számból van több, és mennyivel, a nullára végződő négyjegyű, vagy a nem nullára végződő háromjegyű páros számokból?**

(16 pont)

Megoldás:

A 0-ra végződő négyjegyű számok száma: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, mert az ezres helyiértékre 9, a százasra és a tízesre 10, az egyesre egy féle számot írhatunk.

(7 pont)

A nem 0-ra végződő háromjegyű páros számok száma: $9 \cdot 10 \cdot 4 = 360$.

(6 pont)

Így a 0-ra végződő négyjegyű számokból van 540-gyel több.

(3 pont)

Összesen: 16 pont

Második megoldás:

Ha egy tetszőleges háromjegyű szám után nullát írunk, akkor négyjegyű, nullára végződő számot kapunk. Ezért az első halmaznak van több eleme.

(7 pont)

Annyival van több elem az első halmazban, amennyi a páratlan számra vagy 0-ra végződő háromjegyű számok száma. Ez $9 \cdot 10 \cdot 6 = 540$.

(9 pont)

Összesen: 16 pont

4. **Egy futó versenyen négy fiú és öt lány indult. A győztes lány lett, és a további helyeken sem volt holtverseny. A lányok helyezési számának összege kétszer akkor volt, mint a fiúké. Hányadik helyeken végeztek a fiúk?**

(18 pont)

Megoldás:

A helyezések számának összege $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$

(2 pont)

Így a lányok összpontszáma 30, míg a fiúké 15 lett.

(5 pont)

Ha fiúk a legjobban szerepelnek, akkor mivel az első lány lett, az összpontszámuk $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ lenne.

(5 pont)

Ezt 1-gyel növelni csak úgy lehet, hogy az 5-öst 6-ra cseréljük.

(4 pont)

Így a fiúk által elért helyezések 2. 3. 4. és 6. hely lesz.

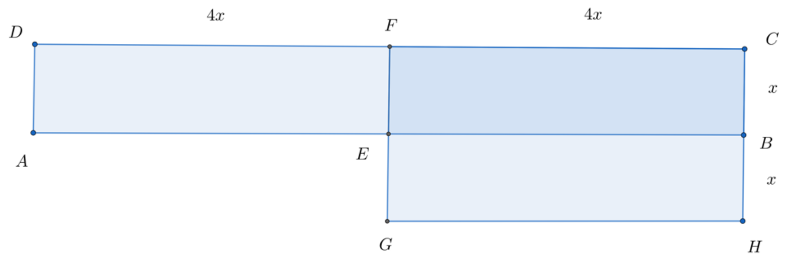
(2 pont)

Összesen: 18 pont

5. **Ha egy téglalapot a hosszabb oldalainak felezőpontjain átmenő egyenes mentén kettévágunk, a két darabból egy 32 cm^2 területű téglalapot tudunk kirakni, melynek egyik oldala kétszerese a másiknak. Hány cm az eredeti téglalap kerülete?**

(18 pont)

Megoldás:
Készítsünk ábrát és használjuk az alábbi jelöléseket!



Az $ABCD$ téglalapot daraboltuk át a $GHCF$ téglalapba.

(2 pont)

Ennek területére:

$$4x \cdot 2x = 32$$

innét pozitív megoldásként

$$x = 2$$

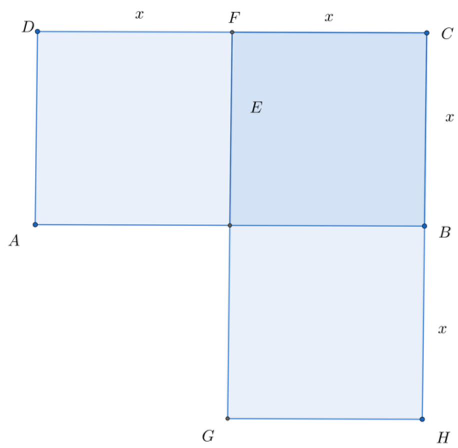
adódik

(5 pont)

Ekkor az eredeti téglalap kerülete: $k_1 = 2(8x + x) = 18x = 36\ cm.$

(2 pont)

A megadott feltételek az alábbi ábrának megfelelően is teljesülhetnek.



(2 pont)

Ekkor a terület:

$$x \cdot 2x = 32$$

innét pozitív megoldásként

$$x = 4$$

adódik

(5 pont)

Ekkor az eredeti téglalap kerülete: $k_2 = 2(2x + x) = 6x = 24\ cm.$

(2 pont)

Összesen: 18 pont

6. Egy táblára 1-eseket és 2-eseket írtunk, összesen 70 számot. Ezután letöröltünk négyszer annyi 1-est, mint 2-est, így 7-szer annyi 2-es maradt mint 1-es. Hány 1-es és 2-es számjegy szerepelt a táblán eredetileg?

(20 pont)

Megoldás:

Legyen az 1-esek, a 2-esek és a törölt 2-esek száma rendre x, y, t.
Így a feltételek alapján

$$x + y = 70$$

(2 pont)

Másrészt

$$7(x - 4t) = y - t$$

(4 pont)

Ez az egyenlet a következő alakra hozható:

$$7x - y = 27t$$

Ha ezt az egyenletet az elsőhöz adjuk, akkor abból:

$$8x = 27t + 70 = 24t + 64 + 3t + 6$$

majd

$$x = 3t + 8 + \frac{3(t+2)}{8}$$

adódik.
Felhasználva, hogy a változók csak egész számok lehetnek, $t + 2$-nek 8-cal oszthatónak kell lennie.

(8 pont)

Ebből a feltételből csak két eset ad megfelelő megoldást:

Ha $t = 6$, akkor $x = 29$ és $y = 41$.
Ha $t = 14$, akkor $x = 56$ és $y = 14$.

(4 pont)

A második esetben minden szám törlésre kerül, de ekkor is teljesül a feltétel. Ezt az ellenőrzés is igazolja.

(2 pont)

Összesen: 20 pont