

## 11. évfolyam gimnázium

### I. forduló

1. Egy koncertre háromféle jegyet árúsítanak: ülőhelyes, állóhelyes és VIP-jegyet. Az eladott jegyek 20%-a VIP jegy, 10%-a ülőhelyes jegy. Ha a szervezők 3000 állóhelyes jeggyel többet tudtak volna eladni, akkor az eladott jegyek 75%-a lenne állóhelyes. Összesen hány jegyet adtak el a koncertre? **(10 pont)**

2. Bendegúz csomagautomatába rendelt egy csomagot, de a hat számjegyből álló nyitókódot elfelejtette. Arra azért emlékszik, hogy az első 5 szám közt két darab 0, két darab 5-ös és egy darab 7-es számjegy van, valamint a kód nem kezdődött a 0 számjeggyel. Azt is megjegyezte, hogy a hat számjegyből álló nyitókód osztható 3-mal. Mekkora a valószínűsége, hogy Bendegúz első próbálkozásra ki tudja nyitni az automatát, ha a feltételeknek megfelelő kóddal próbálkozik? **(10 pont)**

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x^2 - 2x - 8)^2 + (x^2 - x - 6)^2 = (x^2 - 4)^2$$

**(10 pont)**

4. Az  $ABCDEF$  szabályos hatszög  $BC$  oldalának felezőpontja  $P$ ,  $EF$  oldalának felezőpontja  $Q$ .  
a) Bizonyítsuk be, hogy az  $APDQ$  négyszög rombusz.  
b) Hányadrésze az  $APDQ$  négyszög területe az  $ABCDEF$  hatszög területének?

**(10 pont)**

5. Az  $f$  függvényt a valós számok halmazán a következő hozzárendelési szabállyal értelmezzük ( $p$  valós paraméter):

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x + 9} + p, & \text{ha } x < 0 \\ |x - 3| + 2p, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját, ha a  $p$  paraméter értéke 0.  
b) Határozzuk meg a  $p$  paraméter értékét úgy, hogy az  $f(x) = 0$  egyenletnek pontosan három megoldása legyen.

**(10 pont)**

6. Az  $ABCD$  téglalap oldalaira  $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$ , a téglalap átlóinak metszéspontja  $O$ . Az  $AOD$  háromszög beírt körének sugara  $r_1$ , a  $DOC$  háromszögé  $r_2$ . Határozzuk meg az  $\frac{r_1}{r_2}$  arány pontos értékét. **(10 pont)**