12. évfolyam gimnázium

I. forduló

1. Egy társasjátékhoz dobókocka helyett szabályos oktaéder alakú dobótestet használnak. Az oktaédert nyolc (egybevágó) szabályos háromszöglap határolja, és a felső lapján megjelenő számot tekintik a dobás eredményének. A dobótest minden lapjára ugyanakkora valószínűséggel esik. Az oktaéder egyetlen lapjára írtak 1-es számot, néhány további lapjára 2-est, a maradék lapokra 3-ast. A test hány lapján szerepelhet a 2-es szám, ha $\frac{3}{16}$ annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni dobás során pontosan egyszer dobunk 2-est és egyszer 3-ast? **(10 pont)**

2. A pozitív egész n szám pozitív osztóinak szorzata 2^{210}. Bizonyítsuk be, hogy n felírható egy egész szám negyedik, illetve egy másik egész szám ötödik hatványaként. **(10 pont)**

3. Egy osztály tanulói három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Angolul 18-an, németül 14-en és franciául 10-en tanulnak. Ebben az osztályban nincs olyan tanuló, aki mindhárom nyelvet tanulja, és mindössze 6 olyan tanuló van, aki csak franciául tanul. Legkevesebb hány tanuló jár az osztályba? **(10 pont)**

4. Az *ABC* háromszög két csúcspontjának koordinátái: $A(0;-5), B(4;-3)$. A háromszög *C* csúcsa az $(x-4)^2+(y-2)^2=5$ egyenletű körön mozog. Milyen határok közt változik az *ABC* háromszög területe? **(10 pont)**

5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(3^x-1)^2+(7^x-49)^2=(3^x+7^x-50)^2$$

(10 pont)

6. Az *ABC* háromszög egy belső pontja *P*. A *PA*, *PB*, *PC* szakaszok felezőpontja rendre *D*, *E* és *F*. A *CD* és *AF* szakaszok metszéspontja *R*, ehhez hasonlóan az *AE* és *BD* szakaszok metszéspontja *S*, és a *BF* és *CE* szakaszok metszéspontja *T*. Bizonyítsuk be, hogy a *DSETFR* hatszög területe a *P* pont választásától független állandó. **(10 pont)**