11. évfolyam gimnázium, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy koncertre háromféle jegyet árusítanak: ülőhelyes, állóhelyes és VIP-jegyet. Az eladott jegyek 20%-a VIP jegy, 10%-a ülőhelyes jegy. Ha a szervezők 3000 állóhelyes jeggyel többet tudtak volna eladni, akkor az eladott jegyek 75%-a lenne állóhelyes. Összesen hány jegyet adtak el a koncertre?

Jelölje x az összes eladott jegyek számát. Ekkor a VIP jegyek száma $0{,}2x$, az ülőhelyes jegyek száma $0{,}1x$, az állóhelyes jegyek száma $0{,}7x$.	2 pont
Ha 3000 állóhelyes jeggyel többet tudtak volna eladni, akkor az eladott jegyek száma $x + 3000$ lett volna, ennek 75%-a $0{,}75(x + 3000)$.	2 pont
A feladat szövege alapján $$0{,}7x + 3000 = 0{,}75(x + 3000),$$	2 pont
amiből a zárójelek felbontása és rendezés után $$0{,}05x = 750.$$	1 pont
Az egyenlet megoldása $x = 15000$.	1 pont
A koncertre összesen 15000 jegyet adtak el.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy ez valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

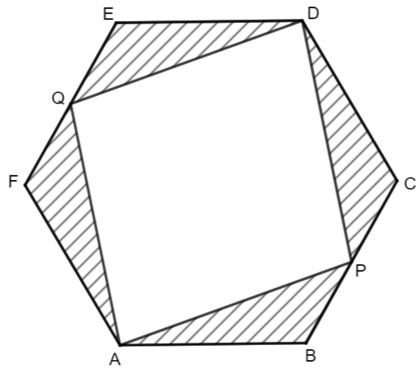
2. Bendegúz csomagautomatába rendelt egy csomagot, de a hat számjegyből álló nyitókódot elfelejtette. Arra azért emlékszik, hogy az első 5 szám közt két darab 0, két darab 5-ös és egy darab 7-es számjegy van, valamint a kód nem kezdődött a 0 számjeggyel. Azt is megjegyezte, hogy a hat számjegyből álló nyitókód osztható 3-mal. Mekkora a valószínűsége, hogy Bendegúz első próbálkozásra ki tudja nyitni az automatát, ha a feltételeknek megfelelő kóddal próbálkozik?

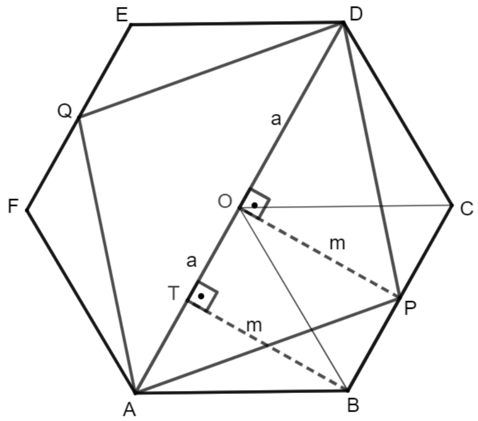
Az első öt helyen álló számjegyek összesen $\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30$ lehetséges módon rendezhetők sorba.	1 pont
Ebből 0-val kezdődik $\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!} = 12$.	2 pont
Az első öt számjegy összesen tehát $30 - 12 = 18$-féleképpen helyezhető el.	2 pont
A megadott számjegyek összege 17, ezért a 3-mal való oszthatóság feltétele miatt az utolsó számjegy 1-es, 4-es vagy 7-es lehet.	2 pont
Az összes hatjegyű nyitókódok száma így $18 \cdot 3 = 54$.	1 pont
Annak a valószínűsége, hogy Bendegúz elsőre próbálkozásra ki tudja nyitni az automatát $\frac{1}{54}$.	2 pont
Összesen:	**10 pont**

3. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.* $$(x^2-2x-8)^2+(x^2-x-6)^2=(x^2-4)^2$$

Alakítsuk szorzattá az egyenletben szereplő hatványok alapját: $x^2-2x-8=(x+2)\cdot(x-4)$.	1 pont
$x^2-x-6=(x+2)\cdot(x-3)$.	1 pont
$x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$.	1 pont
A szorzatokat felhasználva az egyenlet az alábbi alakban írható: $$(x+2)^2\cdot(x-4)^2+(x+2)^2\cdot(x-3)^2=(x+2)^2\cdot(x-2)^2.$$	1 pont
Az $x=-2$ megoldása az egyenletnek. Ha $x\neq-2$, akkor mindkét oldalt eloszthatjuk az $(x+2)^2$ kifejezéssel, így	2 pont
$$(x-4)^2+(x-3)^2=(x-2)^2.$$	1 pont
A műveletek elvégzése után az $$x^2-10x+21=0$$ egyenlethez jutunk.	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet gyökei $x=7$ és $x=3$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy mindhárom gyök megoldása az egyenletnek.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

4. *Az ABCDEF szabályos hatszög BC oldalának felezőpontja P, EF oldalának felezőpontja Q.* a) *Bizonyítsuk be, hogy az APDQ négyszög rombusz.* b) *Hányadrésze az APDQ négyszög területe az ABCDEF hatszög területének?*

a) Az *ABP*, *DCP*, *DEQ*, *AFQ* háromszögekben két-két oldal és az általuk bezárt szög megegyezik, ezért a háromszögek egybevágók.  	2 pont
Az egybevágóságból adódik, hogy $AP=DP=DQ=AQ$,	1 pont
így az *APDQ* négyszög oldalai megegyeznek, ezért *APDQ* rombusz.	1 pont

<table>
<tr><td>b) Az ábra jelöléseit követve jelöljük az APD háromszög AD oldalhoz tartozó magasságát m-mel, az AO szakasz hosszát a-val. Ekkor $AD = 2a$, és az ABO háromszög AO oldalhoz tartozó BT magassága m.

</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Mivel $AD \parallel BC$, ezért $BT = OP = m,$ így az APD háromszög területére
$$T_{APD} = \frac{2am}{2} = am,$$
ezért az APDQ rombusz területe
$$T_{APDQ} = 2am.$$</td><td>2 pont</td></tr>
<tr><td>Az ABO háromszög területére
$$T_{ABO} = \frac{am}{2},$$
ezért az ABCDEF hatszög területe
$$T_{ABCDEF} = 6 \cdot T_{ABO} = 3am.$$</td><td>2 pont</td></tr>
<tr><td>Az APDQ rombusz és az ABCDEF hatszög területének aránya
$$\frac{T_{APDQ}}{T_{ABCDEF}} = \frac{2am}{3am} = \frac{2}{3}.$$</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>10 pont</td></tr>
</table>

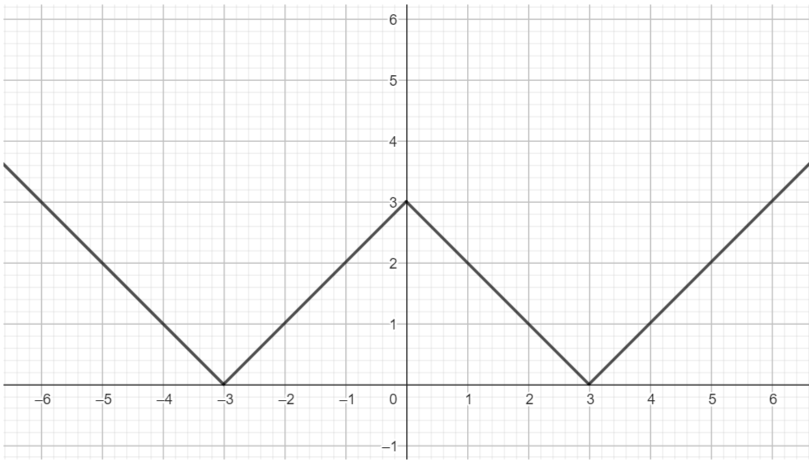
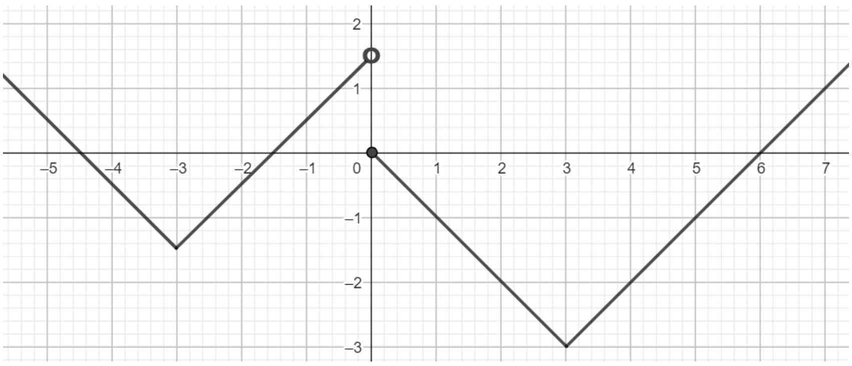
5. *Az f függvényt a valós számok halmazán a következő hozzárendelési szabállyal értelmezzük (p valós paraméter):*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x + 9} + p, & ha\ x < 0 \\ |x - 3| + 2p, & ha\ x \geq 0 \end{cases}$$

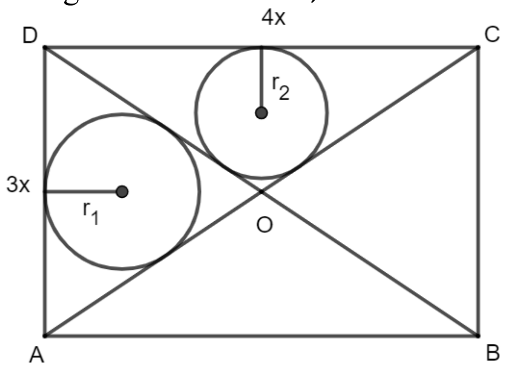
a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját, ha a p paraméter értéke 0.

b) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan három megoldása legyen.

a) Mivel $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = \lvert x + 3 \rvert,$	2 pont

ezért ha $p = 0$, akkor a függvény hozzárendelési szabálya így alakul: $f(x) = \begin{cases} \lvert x+3 \rvert, & \text{ha } x < 0 \\ \lvert x-3 \rvert, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$ A függvény grafikonja az ábrán látható. 	3 pont
b) Ha $p = 0$, akkor a függvénynek két zérushelye van. Ha $p > 0$, akkor $f(x) > 0$, így a függvénynek nincs zérushelye.	1 pont
Ha $p < 0$, akkor az $x \mapsto \lvert x+3 \rvert$ $(x < 0)$ és az $x \mapsto \lvert x-3 \rvert$ $(x \geq 0)$ függvények grafikonját is lefelé kell eltolni. Ha $0 > p \geq -\frac{3}{2}$, akkor a függvény mindkét „ága" két helyen metszi az x-tengelyt, azaz négy zérushely van. Az ábra a $p = -\frac{3}{2}$ esetét mutatja. 	1 pont
Ha $-\frac{3}{2} > p > -3$, akkor az $x \mapsto \lvert x+3 \rvert + p$ $(x < 0)$ függvénynek két, az $x \mapsto \lvert x-3 \rvert + 2p$ $(x \geq 0)$ függvénynek egy zérushelye van, azaz összesen három zérushely adódik.	1 pont
Ha $p \leq -3$, akkor a függvénynek két zérushelye van.	1 pont
Összefoglalva: ha $p \in \left]-3; -\frac{3}{2}\right[$, akkor a függvénynek három zérushelye van.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

6. *Az ABCD téglalap oldalaira* $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}$, *a téglalap átlóinak metszéspontja O. Az AOD háromszög beírt körének sugara* r_1, *a DOC háromszögé* r_2. *Határozzuk meg az* $\frac{r_1}{r_2}$ *arány pontos értékét.*

Az ábra jelöléseinek megfelelően $AB=4x, BC=3x$ alakban írható.  	1 pont
Ekkor az *ACD* háromszögben Pitagorasz tétele alapján $AC=5x$.	1 pont
Az *AOD* háromszög kerületének felére $$s_1=\frac{AO+OD+DA}{2}=\frac{\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}x+3x}{2}=4x,$$	1 pont
területére $$T_1=\frac{T_{ABCD}}{4}=\frac{3x\cdot 4x}{4}=3x^2$$ teljesül.	1 pont
Az *AOD* háromszög beírt körének sugara $$r_1=\frac{T_1}{s_1}=\frac{3x^2}{4x}=\frac{3}{4}x.$$	2 pont
Hasonlóan látható, hogy a *DOC* háromszög kerületének fele $$s_2=\frac{9}{2}x,$$ területe $$T_2=3x^2.$$	1 pont
A *DOC* háromszög beírt körének sugara $$r_2=\frac{T_2}{s_2}=\frac{3x^2}{\frac{9}{2}x}=\frac{2}{3}x.$$	1 pont
A két kör sugarának aránya $$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{3}{4}x}{\frac{2}{3}x}=\frac{9}{8}.$$	2 pont
Összesen:	**10 pont**