12. évfolyam gimnázium, I. forduló

Pontozási útmutató

1.	*Egy társasjátékhoz dobókocka helyett szabályos oktaéder alakú dobótestet használnak. Az oktaédert nyolc (egybevágó) szabályos háromszöglap határolja, és a felső lapján megjelenő számot tekintik a dobás eredményének. A dobótest minden lapjára ugyanakkora valószínűséggel esik. Az oktaéder egyetlen lapjára írtak 1-es számot, néhány további lapjára 2-est, a maradék lapokra 3-ast. A test hány lapján szerepelhet a 2-es szám, ha $\frac{3}{16}$ annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni dobás során pontosan egyszer dobunk 2-est és egyszer 3-ast?*

Ha az oktaéder n lapján a 2-es szám szerepel, akkor $7-n$ lapján szerepel a 3-as szám.	1 pont
Annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni dobás során először 2-est, majd 3-ast dobunk $\frac{n}{8}\cdot\frac{7-n}{8}$. Ugyanennyi a valószínűsége annak is, hogy először dobunk 3-ast, aztán 2-est.	2 pont
A feladat feltételei alapján $$2\cdot\frac{n}{8}\cdot\frac{7-n}{8}=\frac{3}{16}.$$	2 pont
A műveletek elvégzése és rendezés után az $$n^2-7n+6=0$$ egyenlethez jutunk.	2 pont
Az egyenlet megoldásai: $n=1$ és $n=6$.	1 pont
Az oktaéder 1 vagy 6 lapján szerepel a 2-es szám.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy mindkét eredmény megfelel a feladat feltételeinek.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

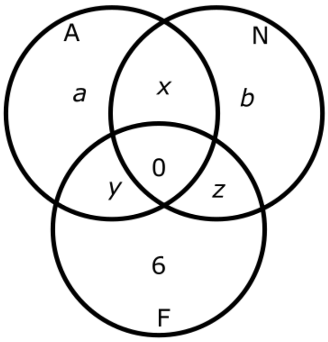
2.	*A pozitív egész n szám pozitív osztóinak szorzata 2^{210}. Bizonyítsuk be, hogy n felírható egy egész szám negyedik, illetve egy másik egész szám ötödik hatványaként.*

Mivel az *n* szám osztóinak szorzata 2-hatvány, az csak úgy lehetséges, ha *n* is 2-hatvány, tehát valamilyen pozitív egész *k* számra $n=2^k$.	1 pont
Az *n* szám pozitív osztói: $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$,	1 pont
ezért a pozitív osztók szorzata: $1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^k=2^{1+2+\cdots+k}$.	1 pont
A kitevőben számtani sorozat tagjai szerepelnek, így azt kapjuk, hogy $$2^{\frac{k(k+1)}{2}}=2^{210},$$ illetve $$\frac{k(k+1)}{2}=210.$$	2 pont

A műveletek elvégzése és rendezés után a $$k^2 + k - 420 = 0$$ másodfokú egyenlethez jutunk.	2 pont
Az egyenlet megoldásai $k = 20$ és $k = -21$.	1 pont
Mivel *k* pozitív egész, ezért $k = 20$. Ekkor $n = 2^{20}$, ami felírható $n = (2^5)^4$, illetve $n = (2^4)^5$ alakban is, így *n* valóban egy egész szám negyedik és egy másik egész szám ötödik hatványa is egyben.	2 pont
Összesen:	**10 pont**

3. *Egy osztály tanulói három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Angolul 18-an, németül 14-en és franciául 10-en tanulnak. Ebben az osztályban nincs olyan tanuló, aki mindhárom nyelvet tanulja, és mindössze 6 olyan tanuló van, aki csak franciául tanul. Legkevesebb hány tanuló jár az osztályba?*

Jelölje *A* az angolul, *N* a németül, *F* a franciául tanulók halmazát. Az egyes részhalmazok elemszámát a Venn-diagram jelöléseinek megfelelően használjuk.

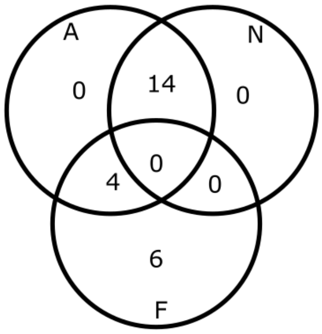


Ekkor a feltételek szerint teljesülnek az alábbi egyenlőségek.

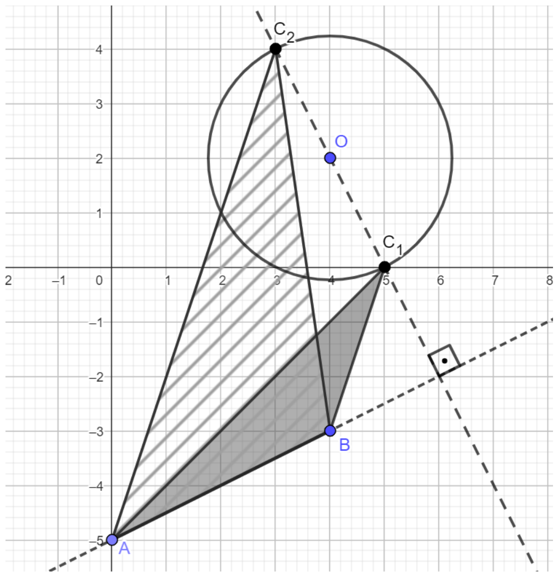
$$\begin{cases} a + x + y = 18 \\ b + x + z = 14 \\ y + z + 6 = 10 \end{cases}$$

1 pont

Az osztályba legalább $N = a + b + x + y + z + 6$ tanuló jár.	1 pont
Adjuk össze az egyenletek megfelelő oldalait: $$a + b + 2(x + y + z) + 6 = 42.$$	1 pont
Mindkét oldalból kivonva az $x + y + z$ összeget: $$N = 42 - (x + y + z)$$ adódik.	1 pont
Az osztályba járó tanulók száma akkor minimális, amikor az $x + y + z$ összeg a lehető legnagyobb. Az egyenletrendszer harmadik egyenletéből következik, hogy $y + z = 4$, ezért $x + y + z = 4 + x$, és az összeg akkor a legnagyobb, amikor *x* maximális.	2 pont
Mivel németül 14-en tanulnak, ezért *x* legnagyobb értéke 14.	1 pont
Ekkor az osztály létszáma legalább $42 - (14 + 4) = 24$ fő.	1 pont

Az alábbi halmazábra mutatja, hogy ez valóban meg is valósulhat. 	2 pont
Összesen:	**10 pont**

4. Az ABC háromszög két csúcspontjának koordinátái: $A(0;-5), B(4;-3)$. *A háromszög C csúcsa az* $(x-4)^2+(y-2)^2=5$ *egyenletű körön mozog. Milyen határok közt változik az ABC háromszög területe?*

Az adott kör O középpontja $O(4;2)$, sugara $r=\sqrt{5}$.	1 pont
Az ABC háromszög AB oldala a C pont választásától függetlenül $AB=2\cdot\sqrt{5}$.	1 pont
Ebből következik, hogy az ABC háromszög területe akkor a lehető legkisebb, ha a C pont az adott kör AB egyeneshez legközelebbi pontja (az ábrán C_1), a minimális területű háromszög magassága pedig pontosan az adott kör sugarával kisebb az O pont AB egyenestől való távolságánál. 	1 pont
Az ABC háromszög területe akkor a legnagyobb, ha a körön lévő pontja (a fenti ábrán C_2) egybeesik a minimális területű háromszöghöz tartozó C_1 csúcs O pontra vonatkozó tükörképével, magassága pedig a kör sugarával nagyobb az O pont AB egyenestől való távolságánál.	1 pont
Az AB egyenes irányvektora $\overrightarrow{AB}(4;2)$, egyenlete pedig $x-2y-10=0$.	1 pont

Az *O* pont és az *AB* egyenes távolsága a pont és egyenes távolságképlete alapján $$d = \left\lvert \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 10}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right\rvert = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{5}.$$	2 pont
A minimális területű ABC_1 háromszög magassága $d - r = 2 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$, területe $$T_{min} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 5.$$ A maximális területű ABC_2 háromszög magassága $d + r = 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$, területe $$T_{max} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}}{2} = 15.$$	2 pont
Az *ABC* háromszög területe az $[5; 15]$ intervallumban változik.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

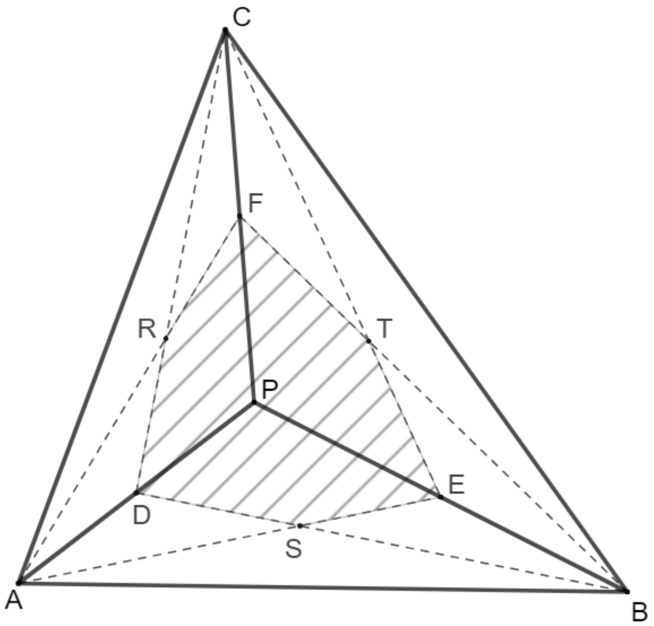
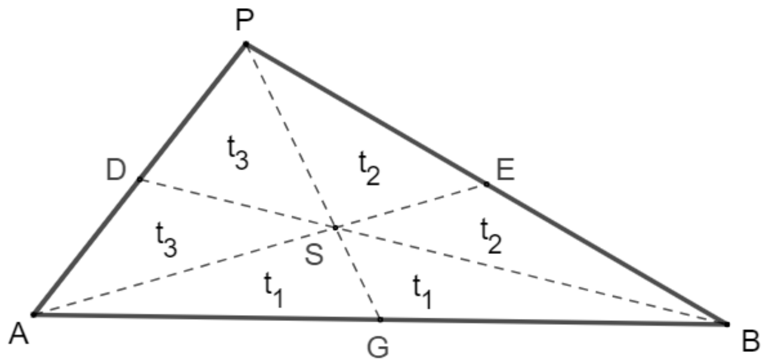
Megjegyzés: A versenyző a C_1, C_2 pontok koordinátáinak kiszámításával is megadhatja a minimális, illetve a maximális területű háromszög területét. A maximális pontszámot ebben az esetben is megkaphatja, ha

- *felírja az O pont koordinátáit (a kör sugarára nincs szükség), és kiszámítja az AB szakasz hosszát (1 pont)*
- *megállapítja, hogy C_1C_2 merőleges az AB egyenesre (1 pont)*
- *felírja az AB egyenes egyenletét (1 pont)*
- *felírja a C_1C_2 egyenes egyenletét: $2x + y = 10$ (1 pont)*
- *kiszámítja a két egyenes metszéspontjának koordinátáit: $(6; -2)$ (1 pont)*
- *kiszámítja a C_1 és C_2 pontok koordinátáit: $C_1(5; 0)$, $C_2(3; 4)$ (2 pont)*
- *kiszámítja a minimális és a maximális területű háromszög magasságát, területét (2 pont)*
- *megadja a megfelelő intervallumot (1 pont).*

5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán. $$(3^x - 1)^2 + (7^x - 49)^2 = (3^x + 7^x - 50)^2$$

Vezessünk be új ismeretleneket a bal oldalon szereplő hatványok alapjaira, legyen $a = 3^x - 1$ és $b = 7^x - 49$. Ekkor a jobb oldalon álló hatvány alapjára $3^x + 7^x - 50 = a + b$.	2 pont
Az egyenlet $$a^2 + b^2 = (a + b)^2$$ alakban írható.	1 pont
A műveletek elvégzése és összevonás után azt kapjuk, hogy $$ab = 0.$$	2 pont
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz $a = 0$, vagy $b = 0$.	2 pont
Ha $a = 3^x - 1 = 0$, akkor $x = 0$.	1 pont
Ha $b = 7^x - 49 = 0$, akkor $x = 2$.	1 pont
A kapott gyökök helyességét ellenőrzés mutatja.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

6. *Az ABC háromszög egy belső pontja P. A PA, PB, PC szakaszok felezőpontja rendre D, E és F. A CD és AF szakaszok metszéspontja R, ehhez hasonlóan az AE és BD szakaszok metszéspontja S, és a BF és CE szakaszok metszéspontja T. Bizonyítsuk be, hogy a DSETFR hatszög területe a P pont választásától független állandó.*	

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. 	1 pont
Az AE és a BD szakasz súlyvonal az ABP háromszögben, ezért az S egybeesik az ABP háromszög súlypontjával. Ugyanígy T súlypont a BCP háromszögben, és R súlypont a CAP háromszögben.	1 pont
A háromszög súlyvonalai a háromszöget egyenlő területű részekre bontják.	2 pont
Ennek bizonyításához tekintsük az ABP háromszöget és az alábbi ábra jelöléseit.  A háromszög súlyvonala megfelezi a háromszög területét, hiszen például SG súlyvonal az ABS háromszögben, ezért $AG = BG$, továbbá az AGS és BGS háromszögek AG és BG oldalakhoz tartozó magassága is megegyezik, így a két háromszög területe valóban egyenlő. Az egyenlő területet az ábrán t_1-gyel jelöltük.	1 pont
Ugyanígy megegyezik a BES és PES háromszögek területe (t_2), valamint a PDS és ADS háromszögek területe (t_3).	1 pont

A *PG* szakasz súlyvonal az *ABP* háromszögben, ezért az *AGP* és *BGP* háromszögek területe is megegyezik, azaz $$t_1 + 2t_3 = t_1 + 2t_2,$$ amiből következik, hogy $$t_2 = t_3.$$ Ugyanígy belátható, hogy $t_1 = t_3$, azaz a súlyvonalak valóban egyenlő területű részekre bontják a háromszöget.	1 pont
A fentiek következményeként $$T_{DSEP} = \frac{1}{3} \cdot T_{PAB}.$$	1 pont
Ugyanígy $$T_{ETFP} = \frac{1}{3} \cdot T_{PBC},$$ és $$T_{FRDP} = \frac{1}{3} \cdot T_{PCA}.$$ Az utolsó három egyenlőség megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy $$\frac{T_{DSETFR}}{T_{ABC}} = \frac{1}{3},$$ ami mutatja, hogy a *DSETFR* hatszög területe a *P* pont helyzetétől függetlenül az *ABC* háromszög területének harmada.	2 pont
Összesen:	**10 pont**

Megjegyzés: Ha a versenyző bizonyítás nélkül hivatkozik arra, hogy a háromszög súlyvonalai a háromszöget egyenlő területű részekre bontják, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.