11. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. A legutóbbi önkormányzati választásokon egy falu szavazásra jogosult lakói közül a nőknek 66%-a, a férfiaknak mindössze 20%-a ment el szavazni. A faluban 176-tal több nő szavazhat, mint férfi. Hányan jogosultak szavazni a faluban, ha a szavazáson a részvételi arány 45%-os volt?

Jelölje a szavazásra jogosult férfiak számát *x*. Ekkor a szavazásra jogosult nők száma $x+176$, az összes szavazásra jogosultak száma pedig $2x+176$.	1 pont
Mivel a szavazáson a részvételi arány 45%-os volt, ezért a szavazáson összesen $0{,}45\cdot(2x+176)$ ember szavazott.	1 pont
A szavazáson $0{,}66\cdot(x+176)$ nő, valamint $0{,}2\cdot x$ férfi vett részt.	2 pont
A feltételek alapján felírható egyenlet: $$0{,}66\cdot(x+176)+0{,}2\cdot x=0{,}45\cdot(2x+176).$$	2 pont
A zárójelek felbontása, majd az egynemű tagok összevonása után $$0{,}86\cdot x+116{,}16=0{,}9\cdot x+79{,}2.$$	1 pont
A kapott egyenlet megoldása $x=924$.	1 pont
A faluban összesen $2\cdot 924+176=$2024-en jogosultak szavazni.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

2. Egy amatőr fallabda bajnokságban bármely két versenyző pontosan egyszer játszik egymással. Ha a bajnokságra 1-gyel több versenyző nevezett volna, akkor 105-nél is több mérkőzést kellett volna lebonyolítani. Amikor az összes játszmáknak pontosan a harmadát lejátszották, akkor még mindig 40-nél kevesebb mérkőzés zajlott csak le. Hány versenyző indult a bajnokságon?

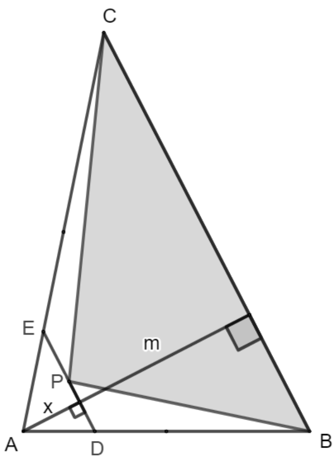
Jelölje a versenyzők számát *x*. Ha 1-gyel több versenyző nevezett volna, akkor a mérkőzések száma $\frac{(x+1)\cdot x}{2}$ lett volna.	1 pont
A feltételek alapján $$\frac{(x+1)\cdot x}{2}>105.$$	1 pont
A műveletek elvégzése és rendezés után azt kapjuk, hogy $$x^2+x-210>0.$$	1 pont
A bal oldalon álló másodfokú kifejezés zérushelyei $x_1=-15, x_2=14$, ezért az egyenlőtlenség (pozitív) megoldásaira $x>14$.	2 pont
Az összes mérkőzések száma $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$, ezért $$\frac{x\cdot(x-1)}{6}<40,$$	1 pont

amiből $$x^2 - x - 240 < 0.$$	1 pont
A kapott másodfokú kifejezés zérushelyei $x_1 = -15, x_2 = 16$, így az egyenlőtlenség pozitív megoldásaira $x < 16$.	2 pont
A versenyen tehát összesen 15 versenyző indult. Ennek helyességét ellenőrzés mutatja.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán. $$4x^4 = 9x^2 + 12x + 4.$$

Alakítsunk ki teljes négyzeteket az egyenlet mindkét oldalán: $$(2x^2)^2 = (3x+2)^2,$$	3 pont
majd rendezzünk 0-ra és alakítsuk szorzattá a bal oldalon álló kifejezést: $$(2x^2)^2 - (3x+2)^2 = 0,$$ $$(2x^2 - 3x - 2) \cdot (2x^2 + 3x + 2) = 0.$$	2 pont
A bal oldalon álló szorzat valamelyik tényezője 0, ezért $$2x^2 - 3x - 2 = 0,$$ vagy $$2x^2 + 3x + 2 = 0.$$	2 pont
Az első egyenlet gyökei $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$.	1 pont
A második egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért az egyenletnek nincs megoldása.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy $x_1 = 2$, és $x_2 = -\frac{1}{2}$ valóban megoldása az egyenletnek.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

4. *Az ABC háromszög AB, illetve AC oldalának A-hoz legközelebbi negyedelőpontja D, illetve E, a DE szakasz felezőpontja P. Határozzuk meg a BCP és az ABC háromszögek területének arányát.*

Az ábra jelöléseit követve az *ABC* háromszög *BC* oldalához tartozó magasságát *m*, az *ADE* háromszög *ED* oldalához tartozó magasságát *x* jelöli.  Az *ADE* és *ABC* háromszögek oldalaira $$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4},$$ továbbá a két háromszög *A* csúcsnál lévő szöge közös, ezért	2 pont
az *ADE* és *ABC* háromszögek hasonlók egymáshoz.	2 pont
A két háromszög hasonlóságának aránya $\lambda=\frac{1}{4}$,	1 pont
ezért $\frac{x}{m}=\frac{1}{4}$, amiből $x=\frac{1}{4}m$.	1 pont
A *BCP* háromszög magassága $m-x=m-\frac{1}{4}m=\frac{3}{4}m$,	2 pont
így a *BCP* és *ABC* háromszögek területének arányára $$\frac{T_{BCP}}{T_{ABC}}=\frac{\frac{BC\cdot\frac{3}{4}m}{2}}{\frac{BC\cdot m}{2}}=\frac{3}{4}.$$	2 pont
Összesen:	**10 pont**

5. *Az a, b, c, d páronként különböző pozitív egész számokra képezzük az* $$X=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$ *szorzatot.* a) *Bizonyítsuk be, hogy az X szám többszöröse a 3-nak.* b) *A 2-nek melyik az a legnagyobb pozitív egész kitevős hatványa, amellyel az X biztosan osztható?*

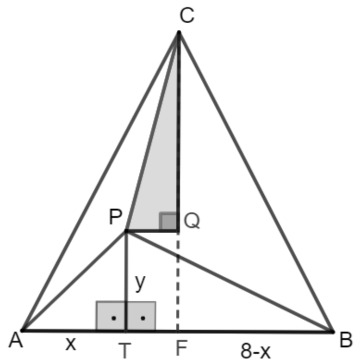
a) Egy egész szám 3-as maradéka 0, 1, vagy 2 lehet,	1 pont

	ezért a skatulya-elv alapján az a, b, c, d számok közt biztosan van két olyan, amelyeknek 3-as maradéka megegyezik.	2 pont
	Ennek a két számnak a különbsége biztosan osztható 3-mal, így X osztói közt van 3-mal osztható, ezért valóban a 3-nak egy többszöröse.	2 pont
b)	Ha az a, b, c, d számok mindegyike páros, vagy mindegyike páratlan, akkor X minden tényezője páros, ezért X osztható 2^6-nal. Ha az a, b, c, d számok közt egy páratlan és három páros, vagy egy páros és három páratlan szám van, akkor X tényezői közt három páros és három páratlan szám van, ezért X biztosan osztható 2^3-nal. Végül pedig, ha az a, b, c, d számok közt kettő páros és kettő páratlan szám van, akkor X tényezői közt két páros és négy páratlan szám van, ezért X biztosan osztható 2^2-nal.	4 pont*
	Az $a = 4, b = 2, c = 1, d = 3$ számok mutatják, hogy vannak olyan a, b, c, d számok, amelyekre X nem osztható 2^3-nal, ezért a 2-nek a második hatványa a legnagyobb, amivel X biztosan osztható.	1 pont
	Összesen:	**10 pont**

*Megjegyzés a *-gal megjelölt gondolati egységhez: A négy azonos paritású szám között vagy van két pár olyan, amelyeknek a 4-es maradéka megegyezik, vagy van három ilyen tulajdonságú szám. Így a különbségek közt legalább kettő 4-gyel is osztható, ezért X osztható 2^8-nal is.*
A három páros (vagy három páratlan) szám közül kettőnek biztosan megegyezik a 4-es maradéka, így azok különbsége osztható 4-gyel is, így X osztható 2^4-nel is.
Ha a versenyző a fenti észrevételeket nem írja le, akkor is megadható a 4 pont.

6. *Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = 8, AC = BC = \sqrt{80}$, a háromszög egy belső P pontja az A csúcstól $\sqrt{8}$, a B csúcstól $\sqrt{40}$ egység távolságra található. Mekkora távolságra van a P pont a háromszög C csúcsától?*

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. A P pontból az ABC háromszög alapjára állított merőleges talppontját T, az alaphoz tartozó CF magasságra emelt merőleges talppontját pedig Q jelöli. Legyen továbbá $PT = y$, $AT = x$. Ekkor $BT = 8 - x$.



2 pont

Az APT és BPT derékszögű háromszögekben Pitagorasz tételét alkalmazva

$$x^2 + y^2 = 8,$$

illetve

$$(8 - x)^2 + y^2 = 40.$$

2 pont

A két egyenlet megfelelő oldalait egymásból kivonva azt kapjuk, hogy $$x^2-(8-x)^2=-32,$$	1 pont
amiből a $$16x-64=-32$$ egyenlethez jutunk.	1 pont
A kapott egyenlet megoldása $x=2$,	1 pont
amiből $y=2$.	1 pont
Az *ACF* derékszögű háromszögben $$AF^2+CF^2=80,$$ $$4^2+CF^2=80,$$ $$CF=8.$$	1 pont
A szintén derékszögű *PCQ* háromszögben $PQ=AF-x=2$, valamint $CQ=CF-y=6$, ezért Pitagorasz tétele alapján $$CP^2=2^2+6^2=40,$$ amiből $CP=\sqrt{40}$. A *P* pont a háromszög *C* csúcsától $\sqrt{40}$ egység távolságra van.	1 pont
Összesen:	**10 pont**